

Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen.

Von **E. H. Kennard** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 17. Juli 1927.)

Es wird die quantenmechanische Lösung einfacher Bewegungstypen (Elektron im homogenen elektrischen bzw. magnetischen Felde, Oszillator) nach der Dirac-Jordan-Heisenbergschen Methode gegeben. Das Ergebnis kann dahin formuliert werden, daß der Unterschied der Quantentheorie von der klassischen in solchen einfachen Fällen nur in der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation zwischen den Werten kanonisch konjugierter Variablen besteht. Die Voraussetzung dafür ist, daß das „Wellenpaket“ von Schrödinger im Sinne der neuen Theorie als „Wahrscheinlichkeitspaket“ umgedeutet wird. Nebenbei wird die mathematische Theorie an einigen Stellen ausführlicher dargestellt.

Schon in den Arbeiten von Dirac¹ und Jordan² hatte die Quantenmechanik noch über die Arbeiten von Schrödinger hinaus eine tiefgehende mathematische Ausbildung gefunden. Jetzt hat Heisenberg³ eine wichtige Ergänzung nach der anschaulichen Seite hin gegeben und die Grundbegriffe der Theorie sind in einem bald erscheinenden Artikel von Bohr noch weiter aufgeklärt. Durch diese Arbeiten scheint der Grundbau der Theorie von materiellen Systemen in ziemlich vollendeter Form dargestellt. In der vorliegenden Abhandlung wird das „Wellenpaket“ von Schrödinger im Sinne der neuen Theorie als „Wahrscheinlichkeitspaket“ umgedeutet und es wird an einfachen Beispielen gezeigt, wie der Übergang zur klassischen Theorie gerade durch die eventuelle Zerstreuung des Pakets vollständig aufgeklärt wird. Nebenbei sind auch einige Punkte der mathematischen Struktur etwas ausführlicher dargelegt.

Der neue Ansatz von Heisenberg ist aus der konsequenten Bestrebung entstanden, jeden Zahlwert einer dynamischen Variablen als Ergebnis eines möglichen Experiments aufzufassen. Behauptet man z. B., ein Elektron sei zurzeit t mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit in einer gewissen Lage, so bedeutet das: eine genaue Beobachtung der Lage zu dieser Zeit, etwa mit einem γ -Strahl-Mikroskop, würde das Elektron mit jener Wahrscheinlichkeit an dieser Stelle zum Vorschein bringen. Bei

¹ P. Dirac, Roy. Soc. Proc. **113**, 621, 1927.

² P. Jordan, ZS. f. Phys. **40**, 809, 1927.

³ W. Heisenberg, ebenda **43**, 172, 1927.

solchen Beobachtungen soll es nun prinzipiell unmöglich sein, ein kanonisches Paar von Variablen, wie etwa Lage und Impuls, gleichzeitig mit unbegrenzter Genauigkeit zu messen; man kann immer nur Wahrscheinlichkeitskurven für ihre möglichen Werte feststellen. Die genaue Formulierung dieses Verhaltens geschieht am einfachsten mittels des von Pauli eingeführten Begriffs der „Wahrscheinlichkeitsamplitude“ und der von Dirac und Jordan erweiterten Matrixtheorie. In unwesentlich abgeänderter Form kann man das zugrunde gelegte physikalische Prinzip so aussprechen:

Alles, was wir vom Zustand eines Systems unter gegebenen Umständen wissen, läßt sich in Form einer Wahrscheinlichkeitsamplitude angeben. Sei diese $M(x_1 x_2 \dots x_u)$, wo $x_1 x_2 \dots x_u$ ($u =$ Anzahl der Freiheitsgrade des Systems) irgendwelche unabhängige und miteinander vertauschbare dynamische Größen des Systems sind; bedeutet M^* den konjugiert komplexen Wert von M , so ist $M M^* dx_1 \dots dx_u$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine genaue Messung des Wertes der Variablen zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$, x_2 und $x_2 + dx_2 \dots$ ergeben würde. Es läßt sich dann die Wahrscheinlichkeitsamplitude für irgend eine andere Gruppe $x'_1 \dots x'_u$ von unabhängigen miteinander vertauschbaren und mit den x' dynamisch verbundenen Größen aus M gewinnen durch Multiplikation mit derjenigen Transformationsmatrix $S(x_1, \dots, x_u, x'_1 \dots x'_u)$, die vom x -Schema, in welchem die x zahlenartig diagonal sind, zu dem x' -Schema transformiert, in welchem die x' zahlenartig diagonal sind; d. h.

$$M(x'_1 \dots x'_u) = \int \int M(x_1, \dots, x_u) S(x_1, \dots, x_u; x'_1 \dots x'_u) dx_1 \dots dx_u. \quad (1)$$

Als x oder als x' mögen z. B. die Koordinaten gewählt werden, und dabei könnten die x sich auf einen Zeitpunkt und die x' auf einen anderen beziehen; oder sie könnten Impulse sein, oder zum Teil Koordinaten und zum Teil die zu den anderen Koordinaten gehörigen Impulse, oder die Energie nebst ($u - 1$) anderen mit der Energie vertauschbaren Größen, wie z. B. dem Impulsmoment, usw.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude kann als komplexes Wahrscheinlichkeitspaket betrachtet werden, welches eine bestimmte Ausdehnung hat und sich mit der Zeit bewegt; oder aber wir können die daraus folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung als reelles Wahrscheinlichkeitspaket auffassen. Letzteres ist dem Schrödingerschen Wellenpaket sehr nahe verwandt, wie unten erläutert ist. Auf die physikalische Bedeutung der Wahrscheinlichkeit selbst kommen wir auch unten bei Be-

sprechung des „Unbestimmtheitsgesetzes“ [Gleichung (27)] zurück. Zunächst wollen wir aber die nötigen Hilfsmittel der Transformationstheorie kurz anführen.

1. Die erweiterte Matrixtheorie.

Für die meisten Einzelheiten der mathematischen Struktur verweisen wir auf die grundlegenden Abhandlungen von Dirac und Jordan (l. c.); hier wollen wir nur die Theorie an einigen Punkten etwas ausführlicher ausbauen, die die hier in Betracht kommende Anwendung betreffen.

Wir werden mit Matrizen arbeiten müssen, in welchen die „die Zeilen und Kolonnen numerierenden Variablen“ verschieden sind und eventuell auch gänzlich oder zum Teil nur diskreter Werte fähig sind. In diesem erweiterten Sinne unterscheidet sich eine Matrix nur wenig von einer gewöhnlichen Funktion zweier Veränderlicher (oder mehrerer Paare von Veränderlichen). Nach meiner Erfahrung hat man eine viel übersichtlichere Schreibweise, wenn man denselben Buchstaben für die eine gegebene Variable in allen Schemata darstellende Matrix gebraucht und die unabhängigen Variablen dann nötigenfalls durch angehängte Buchstaben angibt. Wir bezeichnen also die Matrix \mathbf{S} , deren „horizontale und vertikale Variablen“ x und y sind, unter Umständen mit \mathbf{S}_{xy} , und ein Element davon, als gewöhnliche Funktion von x und y betrachtet, mit $(\mathbf{S})(x, y)$ oder $S(x, y)$ oder auch, falls x für beide Variablen steht, mit $(\mathbf{S})(x', x'')$ oder $S(x', x'')$. Dann ist in zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{S}_{x_1, x_2; y_1, y_2} T_{y_1, y_2; z_1, z_2})(x_1, x_2; z_1, z_2) \\ &= \iint S(x_1, x_2; y_1, y_2) dy_1 dy_2 T(y_1, y_2; z_1, z_2), \end{aligned} \quad (2)$$

wo die Integration über das ganze zulässige Gebiet von y_1, y_2 zu erstrecken und über Teilgebiete, wo diese Variablen nur diskreter Werte fähig sind, durch eine Summe zu ersetzen ist.

Um nun auch im kontinuierlichen Falle diagonale Matrizen zu haben, führt Dirac ein Symbol $\delta(x)$ ein, für welches alle Relationen mit anderen Symbolen gelten sollen, die beim Grenzübergang für eine Funktion $\Phi(x)$ gelten, welche dem Werte 0 für alle $x \neq 0$ zustrebt, während stetig (oder wenigstens beim Grenzübergang) $\int \Phi(x) dx = 1$ ist. Die Gestalt von $\delta(x)$ ist dabei innerhalb weiter Grenzen (bei nicht allzu großer Unstetigkeit usw.) ganz willkürlich. Auf ähnliche Weise entsteht $\delta'(x)$ aus

der ersten Ableitung einer solchen $\Phi(x)$. Durch nähere Betrachtung des genannten Grenzüberganges stellt man folgende Gleichungen fest:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (3 \text{ a})$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \quad (3 \text{ b})$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x), \quad (3 \text{ c})$$

$$\int f(x)\delta(a-x)dx = f(a), \quad (4 \text{ a})$$

$$\int f(x)\delta'(a-x)dx = f'(a), \quad (4 \text{ b})$$

in welchen für f auch eventuell δ oder δ' stehen kann.

Manchmal gilt es, eine Gleichung wie $g(x, y) = \delta(x - y)$ zu beweisen. In einem solchen Falle ist der linksstehende Ausdruck stets mathematisch sinnlos (z. B. ein divergentes Integral), und die Gleichung besagt etwa folgendes: wenn eine kleine Abänderung der Funktion $g(x, y)$ so vorgenommen wird, daß der Ausdruck einen Wert erhält, und $g(x, y)$ dann ihrer ursprünglichen Form zustrebt, so nähert sich der Wert des Ausdrucks dem Grenzwert 0, falls $x \neq y$, während $\int g(x, y)dx$ und $\int g(x, y)dy$ den Wert 1 besitzen oder doch wenigstens in der Grenze annehmen. Ähnlich heißt $g(x, y) = \delta'(x - y)$: wenn g auf diese Weise abgeändert wird, so wird sie zu der Ableitung einer Funktion der eben beschriebenen Art.

Diese Eigenschaften müssen von der Art der Einführung des Parameters unabhängig sein, was in den tatsächlich vorkommenden Fällen ohne Beweis genügend einleuchtet.

Die Einheitsmatrix heißt dann in einem (x, x) Schema:

$$(\mathbf{1}_x)(x', x'') = \delta(x' - x''); \quad (5)$$

denn, wenn \mathbf{S} irgend eine Matrix in diesem Schema ist, so ist nach (3 a) und (4 a):

$$(\mathbf{S}\mathbf{1})(x', x'') = \int S(x', x)dx\delta(x - x'') = S(x', x''),$$

oder $\mathbf{S}\mathbf{1} = \mathbf{S}$. In u Dimensionen ist

$$(\mathbf{1})(x'_1, x'_2, \dots, x'_u; x''_1, x''_2, \dots, x''_u) = \delta(x'_1 - x''_2)\delta(x'_2 - x''_1) \dots \delta(x'_u - x''_u), \quad (6)$$

und für eine Diagonalmatrix \mathbf{T} gilt:

$$\begin{aligned} T(x'_1, \dots, x'_u; x''_1, \dots, x''_u) &= T(x'_1, \dots, x'_u)\delta(x'_1 - x''_1) \dots \delta(x'_u - x''_u) \\ &= T(x''_1, \dots, x''_u)\delta(x'_1 - x''_1) \dots \delta(x'_u - x''_u), \end{aligned} \quad (7)$$

wo das zweite und dritte T eine und dieselbe gewöhnliche Funktion der u Variablen darstellt.

Die beiden definierenden Gleichungen für die Reziproke einer Matrix in einem „gemischten“ Schema sehen verschieden aus, z. B.:

$$S_{xy} S_{yx}^{-1} = I_{xx}, \quad S_{yx}^{-1} S_{xy} = I_{yy}. \quad (8)$$

Trotzdem werden wir beweisen, daß, wie im diskreten Falle, die eine dieser Gleichungen die andere mit sich zieht, wenn das Funktionensystem der S_{xy} vollständig ist; bei der „Normierung“ braucht man also nur dafür zu sorgen, daß die eine Gleichung befriedigt ist.

Sei $S_1(x, y)$ die Bezeichnung für $S(x, y)$, wenn es durch Einführung eines kleinen Parameters α so abgeändert wird, daß folgende Integrale konvergieren; dann besagt die erste von Gleichung (8), da stets $S^{-1}(y, x) = S^*(x, y)$ sein muß:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha=0} \int \int S_1(x', y) S_1^*(x'', y) dx'' dy &= 1; \\ \lim_{\alpha=0} \int S_1(x', y) S_1^*(x'', y) dy &= 0, \quad x' \neq x''. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Betrachten wir nun die Integralgleichung

$$J_1(y'') = \int \varphi(x) S_1^*(x, y'') dx, \quad (10)$$

wo $J_1(y'')$ als willkürliche Funktion und $\varphi(x)$ als die Lösung der Gleichung aufzufassen sind. Dann ist

$$\int J_1(y') S_1(x, y') dy' = \int \int \varphi(x') S_1(x, y') S_1^*(x', y') dx' dy'. \quad (11)$$

Führen wir hier rechter Hand die Integration nach y' aus und lassen wir alsdann α gegen Null gehen, so konvergiert nach (9) die so gewonnene Funktion von x' gegen Null für $x' \neq x$; also leuchtet es nach (9) ein, daß

$$\lim_{\alpha=0} \int \int \varphi(x') S_1(x, y') S_1^*(x', y') dx' dy' = \varphi(x).$$

Jetzt setzen wir den so aus (11) gewonnenen Ausdruck für $\varphi(x)$ in (10) ein und erhalten:

$$\lim_{\alpha=0} J_1(y'') = \lim_{\alpha=0} \int \int J_1(y') S_1(x, y') S_1^*(x, y'') dx dy'.$$

Da nun $J_1(y)$ willkürlich ist, so sieht man leicht, daß diese Gleichung nur dann bestehen kann, wenn

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha=0} \int \int S_1(x, y') S_1^*(x, y'') dx dy' &= 1; \\ \lim_{\alpha=0} \int S_1(x, y') S_1^*(x, y'') dx &= 0, \quad y' \neq y'', \end{aligned} \right\}$$

was gleichbedeutend ist mit der zweiten von den Gleichungen (8).

Weiter brauchen wir eine Matrix, die zu einer gegebenen Diagonalmatrix kanonisch konjugiert sei. Im gewöhnlichen Sinne kann nun eine solche Matrix überhaupt nicht existieren.

Im diskreten Falle bedarf diese Behauptung kaum eines Beweises. Im kontinuierlichen Falle brauchen wir nur zu beweisen, daß, wenn \mathbf{A} eine diagonale und \mathbf{B} irgend eine andere Matrix ist, so ist

$$(\mathbf{AB} - \mathbf{BA})(x'x) = 0.$$

Ist nun \mathbf{B} nicht diagonal, so ist

$$(\mathbf{AB})(x'x) = \int A(x') \delta(x' - x) dx B(x, x') = A(x') B(x', x');$$

und Vertauschung von \mathbf{A} und \mathbf{B} ändert an diesem Ergebnis nichts. Ist dagegen auch \mathbf{B} diagonal, so ist [nach (4 a) mit δ für f]:

$$(\mathbf{AB})(x', x'') = \int A(x') \delta(x' - x) dx B(x'') \delta(x - x'') = A(x') B(x'') \delta(x' - x''),$$

$$(\mathbf{BA})(x', x'') = \int B(x') \delta(x' - x) dx A(x'') \delta(x - x'') = B(x') A(x'') \delta(x' - x'').$$

Die rechtsstehenden Ausdrücke sind aber gleichwertig; denn sie verschwinden beide für $x' \neq x''$, und man hat z. B. für irgend eine $f(x)$ nach (4 a):

$$\begin{aligned} & \int f(x') A(x') B(x'') \delta(x' - x'') dx' \\ &= \int f(x') B(x') A(x'') \delta(x' - x'') dx' = f(x'') A(x'') B(x''). \end{aligned}$$

Die kanonisch konjugierte Matrix kann also nur symbolisch sein. Im Schema, wo die Koordinaten q_1, \dots, q_n folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} q_r(q'_1, \dots, q'_n; q''_1, \dots, q''_n) &= q'_r \delta(q'_1 - q''_1) \dots \\ &= q''_r \delta(q'_1 - q''_1) \dots \delta(q'_n - q''_n), \end{aligned} \tag{12}$$

hat Dirac gezeigt, daß die Matrix p_r :

$$\begin{aligned} p_r(q'_1 \dots; q''_1 \dots) &= \varepsilon \delta(q'_1 - q''_1) \dots \delta(q'_{r-1} - q''_{r-1}) \delta'(q'_r - q''_r) \\ & \delta(q'_{r+1} - q''_{r+1}) \dots \delta(q'_n - q''_n), \end{aligned} \tag{13}$$

wo $\varepsilon = \hbar/2\pi i$ ist, zu q_r kanonisch konjugiert ist. Den Beweis kann man sehr einfach geben, z. B. in einer Dimension:

$$\begin{aligned} (pq - qp)(q', q'') &= \varepsilon \int \delta'(q' - q) dq q'' \delta(q - q'') - \varepsilon \int q' \delta(q' - q) dq \delta'(q - q'') \\ &= \varepsilon (q'' - q') \delta'(q' - q'') = \varepsilon \delta(q' - q'') = \varepsilon \mathbf{1}_{qq}(q', q''), \end{aligned}$$

nach (4 a) mit $f = \delta'$ und (3 c). In (12) und (13) können auch die Impulse p und die Koordinaten q bei gleichzeitiger Umkehr des Vorzeichens von ε umgetauscht werden. Matrizen, in denen nebst Zahlen

höchstens das Symbol δ vorkommt, wollen wir zahlenartig nennen, Matrizen wie p_r oben, die doch auch diagonal sind, symbolisch diagonal.

Bei Anwendungen der Theorie muß man nun sehr oft von einem Schema, in welchem gewisse Variablen zahlenartig diagonal sind, zu einem neuen übergehen, in welchem andere Variablen diese Eigenschaft besitzen. Für die Auffindung der nötigen Transformationsmatrix haben Dirac und Jordan eine allgemeine Methode gefunden.

Nehmen wir z. B. an, wir haben ein Schema vor uns, in welchem die (einzige) Koordinate x als Matrix zahlenartig diagonal ist und der zugehörige Impuls ξ die einfache Gestalt (13) besitzt, und wir wollen zu einem neuen Schema übergehen, in welchem eine Variable z , als Funktion $z(\xi, x)$ gegeben, zahlenartig diagonal ist. Sei $S(x, n)$ die nötige Transformationsmatrix, wo n irgend eine Funktion von z (eventuell die „Quantenzahl“) bedeutet, die wir als unabhängige Variable benutzen wollen. Dann beweisen jene Autoren folgende Differentialgleichung für S [z. B. Gleichung (11) bei Dirac]:

$$z \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, x \right) S(x, n) = z(n) S(x, n). \quad (14)$$

Der Differentialoperator ist hier in der üblichen Weise aus $z(\xi, x)$ durch Ersetzen von ξ durch $\varepsilon \partial / \partial x$ zu bilden.

Die Lösungen dieser Gleichungen müssen dann so normalisiert werden, daß

$$S_{xn} S_{nx}^{-1} = I_{xx}, \quad S_{nx}^{-1} S_{xn} = I_{nn}, \quad S^{-1}(n, x) = S^*(x, n). \quad (15)$$

Für den diskreten Fall kann man es mit Jordan einfach so auffassen, daß die Normierungskonstante für unzulässige Werte von n einfach Null ist; so gewinnt man einen konsequenten Grund für die Weglassung dieser Werte bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeitsamplituden. Es ist merkwürdig, daß die Form des Auftretens von der neuen Variable n durch die Normierung nur zum Teil bestimmt wird, doch so, daß keine Willkürlichkeit in der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die neue Variable übrig bleibt. Um diesen Umstand klar zutage treten zu lassen, wollen wir zeigen, daß die Matrizen innerhalb des n -Schemas noch weiter transformiert werden können, ohne daß die diagonale Gestalt von z oder die Normiertheit von S verloren geht; mit Rücksicht auf andere Anwendungen, wollen wir den Beweis dafür von einem etwas allgemeineren Standpunkt führen.

Soll die Transformation T_{nn} die zahlenartig diagonale Matrix \mathbf{z}_1 in eine andere solche \mathbf{z}_2 überführen, so gilt:

$$T^{-1} \mathbf{z}_1 T = \mathbf{z}_2, \quad \mathbf{z}_1 T = T \mathbf{z}_2, \quad (16)$$

oder

$$\int z_1(n') \delta(n' - n) dn T(n, n'') = \int T(n', n) dn z_2(n'') \delta(n - n''),$$

$$z_1(n') T(n', n'') = z_2(n'') T(n', n''),$$

nach (4 a). Da $T(n'', n') = T^*(n', n'')$, $z(n) = z^*(n)$, so ergibt sich auch durch Umtauschung von n' und n'' und Übergang zum konjugierten Wert:

$$z_1(n'') T(n', n'') = z_2(n') T(n', n'').$$

Nun wollen wir noch fordern, daß z_1 und z_2 in derselben Richtung mit n wachsen. Dann ergibt sich: $T(n', n'') = 0$ für $n' \neq n''$, also $T(n', n'') = T(n') \delta(n' - n'')$. Die Forderungen

$$TT^{-1} = 1, \quad T^{-1}(n'', n') = T^*(n', n'')$$

liefern nun:

$$\int T(n') \delta(n' - n) dn T^*(n'') \delta(n - n'')$$

$$= T(n') T^*(n'') \delta(n' - n'') = \delta(n' - n''),$$

oder, durch Integration nach n'' , $T(n') T^*(n') = 1$, woraus folgt:

$$T(n', n'') = e^{i\varphi(n')} \delta(n' - n'') = e^{i\varphi(n'')} \delta(n' - n''), \quad (17)$$

wobei $\varphi(n)$ reell aber sonst willkürlich ist¹.

Nachträglich bestätigt man nun leicht, daß die Transformation

$$S_{1xn} = S_{xn} T_{nn}$$

oder

$$S_1(x, n) = e^{i\varphi(n)} S(x, n) \quad (18)$$

ebensogut wie S_{xn} die Matrix \mathbf{z}_{nn} zahlenartig diagonal macht. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude fällt anders aus, denn

$$M_1(n) = \int M(x) S_1(x, n) dx = e^{i\varphi(n)} \int M(x) S(x, n) dx = e^{i\varphi(n)} M(n), \quad (19)$$

aber die Wahrscheinlichkeit selber bleibt ungeändert, da

$$M_1(n) M_1^*(n) = M(n) M^*(n).$$

Diese Willkür in S betrifft vielmehr die Gestalt von ξ , der zu \mathbf{z} kanonisch konjugierten Variable, im neuen Schema. Sei ξ als $\xi(\xi, \mathbf{x})$ bekannt, und setzen wir der Einfachheit halber $n = z$. Dann findet man, daß ξ aus der Formel $\xi_{zz} = S_{zx}^{-1} \xi_{xx} S_{xz}$ berechnet im allgemeinen die Gestalt (13)

¹ Vgl. Born, Heisenberg, Jordan, ZS. f. Phys. 35, 578, 1926.

nicht besitzt (diese Unbestimmtheit der konjugierten Variable wird übrigens von Dirac und Jordan erörtert). Wollen wir nun noch verlangen, daß ξ_{zz} doch diese Gestalt im neuen Schema haben soll, so können wir die umgekehrte Transformation vom z - zum x -Schema auf eine genau entsprechende Weise behandeln. Die Matrix dazu ist natürlich S_{zx}^{-1} und wir haben für sie

$$x \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}, z \right) S^{-1}(z, x) = x S^{-1}(z, x), \quad (20)$$

wo $x(\xi, z)$ den Ausdruck für x als Funktion von ξ, z bedeutet, oder, da $S^{-1}(z, x) = S^*(x, z)$,

$$x \left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}, z \right) S(x, z) = x S(x, z). \quad (21)$$

(14) mit $n = z$ und (21) bestimmen dann $S(x, z)$ bis auf eine von x und z (oder n) unabhängige Konstante.

Die Befriedigung von (21) sowohl wie (14) ist wohl für Wahrscheinlichkeitsberechnungen entbehrlich; sie führt aber einen engen Anschluß an die Schrödingerschen Wellenpakete herbei, wie unten an einem Beispiel (Elektron in elektrischem Felde) erläutert wird.

Für ein System von mehreren Dimensionen erhält man ganz entsprechende Resultate. Hier ist $\mathbf{z} = z(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_u; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_u)$ und (14) und (21) werden zu partiellen Differentialgleichungen für S .

Von den u Variablen q ausgehend, würde man naturgemäß erwarten, gleichzeitig u neue Variable im neuen Schema diagonal machen zu können, was ja die gleichzeitige Lösung von u partiellen Differentialgleichungen für S benötigt. Im allgemeinen besitzt nun bekanntlich ein solches System von Gleichungen keine gemeinsame Lösung; aber hier unterliegen die Gleichungen noch der Bedingung, daß als neue Variablen nur untereinander vertauschbare Größen gewählt werden dürfen. In der Tat beweist man sehr leicht, daß, wenn ein System von partiellen Differentialgleichungen vom Typus (14) eine gemeinsame Lösung besitzt, die linksstehenden Operatoren stets miteinander vertauschbar sind; wenn diese Operatoren in p und q , d. h. $\frac{\partial}{\partial q}$ und q linear sind, zeigt weiter eine einfache Rechnung, daß diese Bedingung für das Bestehen einer gemeinsamen Lösung auch hinreichend ist. Für zwei unabhängige Variable hat man z. B. aus

$$f \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x, y \right) S(x, y) = a S(x, y), \quad g \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x, y \right) S(x, y) = b S(x, y),$$

die Gleichungen $gfS = agS = abS$, $fgS = bfS = baS = abS$, also $gfS = fgS$, welches die Vertauschbarkeit von f und g beweist. Dann haben wir:

$$\left. \begin{aligned} fS &= \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_1 x + \delta_1 y + \varepsilon_1 \right) S = aS, \\ gS &= \left(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2 x + \delta_2 y + \varepsilon_2 \right) S = bS, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

und

$$fg = \alpha_1 \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} x + \alpha_2 \gamma_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \delta_2 \frac{\partial}{\partial y} y + \beta_2 \delta_1 y \frac{\partial}{\partial y} + \dots,$$

$$gf = \alpha_2 \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} x + \alpha_1 \gamma_2 x \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \delta_1 \frac{\partial}{\partial y} y + \beta_1 \delta_2 y \frac{\partial}{\partial y} + \dots,$$

also

$$(fg - gf) = \alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1 + \beta_1 \delta_2 - \beta_2 \delta_1.$$

Nun ist aber nach (22):

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{D} (\beta_1 \delta_2 - \beta_2 \delta_1) y + \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{1}{D} (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) x + \dots$$

Ist also $fg - gf = 0$, so ist auch

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y},$$

und eine gemeinsame Lösung existiert.

Man möchte vermuten, daß die Bedingung auch im allgemeinen hinreicht.

2. Die Transformation $S(q, p)$.

Um zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation zu gelangen, fassen wir jetzt die Transformation von Koordinaten zu Impulsen ins Auge. Es wird genügen, den eindimensionalen Fall zu behandeln, aber diesen werden wir ziemlich ausführlich auseinandersetzen als einfaches Beispiel der Transformationstheorie.

Indem wir in (14) $x = q$, $z = n = \xi = p$ setzen, erhalten wir:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial q} S(q, p) = p S(q, p); \quad S(q, p) = C e^{\frac{pq}{\varepsilon}}. \quad (23 \text{ a, b})$$

So ist $\int S(q, p) S^*(q, p) dp$ divergent, wie es sein muß. Wir schreiben also

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C e^{-\frac{\alpha^2}{2} p^2 + \frac{pq}{\varepsilon}};$$

dann ist¹

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_{qp} \mathbf{S}_{pq}^{-1})(q', q'') &= \int S(q', p) S^*(q'', p) dp \\ &= \lim_{\alpha=0} C C^* \int dp e^{-\alpha^2 p^2 + \frac{1}{\varepsilon}(q' - q'')p} = \lim_{\alpha=0} C C^* \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e x p \left[\frac{(q' - q'')^2}{4 \alpha^2 \varepsilon^2} \right]. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon^2 = -\hbar^2/4\pi^2$, so verschwindet dieser Ausdruck für $\alpha = 0$, außer, wenn $q' = q''$. Übrigens ist

$$\lim_{\alpha=0} C C^* \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int dp' e x p \left[\frac{(q' - q'')^2}{4 \alpha^2 \varepsilon^2} \right] = h C C^*;$$

dasselbe folgt aus Integration nach q'' . Die Lösung wird also nach p normiert sein, wenn wir $h C C^* = 1$ setzen, oder

$$S(q, p) = \frac{1}{\sqrt{h}} e^{\frac{pq}{\varepsilon} + i\lambda}, \quad (24)$$

wo λ eine willkürliche reelle Zahl ist. Man bestätigt leicht, daß die Lösung auch nach q normiert ist, d. h. $\mathbf{S}_{pq}^{-1} \mathbf{S}_{qp} = \mathbf{1}_{pp}$. Der Wert der Normierungskonstante findet sich bei Jordan und Heisenberg nicht.

Neben der in (24) angegebenen $S(q, p)$ ist auch

$$S_1(q, p) = C e^{\frac{pq}{\varepsilon} + i\varphi(p)},$$

wo $\varphi(p)$ irgend eine reelle Funktion bedeutet, eine Lösung von (23 a), und zwar wird sie durch denselben Wert von C normiert. Wenn wir aber noch fordern, daß S auch der umgekehrten Gleichung genüge, nämlich (21) mit $-\varepsilon$ für ε (weil wir von einem Impuls zu einer Koordinate übergehen) oder

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial p} S(q, p) = q S(q, p),$$

dann muß $\varphi(p) = \text{Konstante}$ sein.

Um ein weiteres Beispiel für die Handhabung der δ -Symbole anzugeben, wollen wir noch bestätigen, daß unser \mathbf{S} in der Tat q in eine zahlenartig und p in eine symbolisch diagonale Matrix überführt. Wir haben:

$$\begin{aligned} q_{qq}(q', q'') &= q' \delta(q' - q''), & p_{qq}(q', q'') &= \varepsilon \delta'(q' - q''), \\ \underline{p_{pp}} &= \underline{\mathbf{S}_{pq}^{-1} p_{qq} \mathbf{S}_{qp}}, & \underline{q_{pp}} &= \underline{\mathbf{S}_{pq}^{-1} q_{qq} \mathbf{S}_{qp}}, & S^{-1}(p, q) &= S^*(q, p), \end{aligned}$$

¹ Man bedient sich der Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+ib)x^2} dx = \sqrt{\pi/(a+ib)},$$

falls a und b reell sind und $a > 0$ ist. Bei Integrationen nach q und p sind die Grenzen im allgemeinen $-\infty$ und $+\infty$.

also, nach (13) und (4 b):

$$\begin{aligned} p(p', p'') &= \lim_{\alpha=0} C C^* \iint e^{-\frac{\alpha^2}{2} q_1^2 - \frac{p' q_1}{\varepsilon}} d q_1 \cdot \varepsilon \delta'(q_1 - q_2) d q_2 e^{-\frac{\alpha^2}{2} q_2^2 + \frac{p'' q_2}{\varepsilon}} \\ &= \lim \frac{1}{h} \int (-\alpha^2 \varepsilon q_1 + p'') e^{-\alpha^2 q_1^2 + \frac{p'' - p'}{\varepsilon} q_1} d q_1 \\ &= \lim \frac{(p' + p'') \sqrt{\pi}}{2 \alpha h} e^{\frac{(p' - p'')^2}{4 \alpha^2 \varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Dieses verschwindet für $p' \neq p''$. Es ist auch

$$\begin{aligned} \int p(p', p'') d p' &= \lim \frac{\sqrt{\pi}}{2 \alpha h} \int (p' + p'') e^{\frac{(p' - p'')^2}{4 \alpha^2 \varepsilon^2}} d p' = p'', \\ \int p(p', p'') d p'' &= p'. \end{aligned}$$

Also ist

$$p(p', p'') = p'' \delta(p' - p'') = p' \delta(p' - p''),$$

was den zahlenartig diagonalen Charakter von p bestätigt. Weiter ist

$$\begin{aligned} q(p', p'') &= \lim_{\alpha=0} C C^* \iint e^{-\frac{\alpha^2}{2} q_1^2 - \frac{p' q}{\varepsilon}} d q_1 \cdot q_1 \delta(q_1 - q_2) d q_2 e^{-\frac{\alpha^2}{2} q_2^2 + \frac{p'' q_2}{\varepsilon}} \\ &= \lim \frac{1}{h} \int q_1 e^{-\alpha^2 q_1^2 + \frac{p'' - p'}{\varepsilon} q_1} d q_1 = \lim \sqrt{\pi} \frac{p'' - p'}{2 \alpha^3 \varepsilon h} e^{\frac{(p'' - p')^2}{4 \alpha^2 \varepsilon^2}} \\ &= -\varepsilon \lim_{\alpha=0} \frac{d}{d(p' - p'')} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha h} e^{\frac{(p' - p'')^2}{4 \alpha^2 \varepsilon^2}} \right]. \end{aligned}$$

Dieses verschwindet wieder für $p' \neq p''$; auch ist das Integral des eingeklammerten Ausdrucks nach p' oder p'' gleich Eins. Also gilt:

$$q(p', p'') = -\varepsilon \delta'(p' - p''),$$

wie verlangt. Wir könnten auch weitergehen und (4 b) bestätigen, nach dem $\int f(p'') q(p', p'') d p'' = -\varepsilon f'(p')$ für jede $f(p)$ sein soll.

Das Unbestimmtheitsgesetz. Jetzt wenden wir uns zu dem eigentlichen Kern der neuen Theorie.

Sei $M(q)$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude für q und q_i das durch

$$q_i^2 = 2 \int (q - q_m)^2 M(q) M^*(q) d q \quad (25)$$

definierte Präzisionsmaß oder Unbestimmtheitsmaß; wo $q_m = \int q M M^* d q$ ist. Dann ist für p nach (24):

$$M(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int M(q) e^{\frac{p q}{\varepsilon}} d q. \quad (26)$$

Zunächst betrachten wir die Gaußsche Verteilung, um die Rolle des imaginären Teiles der Amplitude zu erläutern. Sei

$$M(q) = C_0 e^{-\frac{(q-q_m)^2}{2q_i^2} + i[b^2(q-q_m)^2 + c(q-q_m)]}$$

Dann ist nach (26)

$$M(p) = C_1 e^{-\frac{(p-p_m)^2}{2p_i^2} + i[b_1^2(p-p_m)^2 + c_1(p-p_m) + d]}$$

$$p_m = -\frac{h}{2\pi} c, \quad \frac{1}{b_1^2} = \frac{\pi^2}{h^2} \left[\frac{4q_i^4}{b^2} + b^2 \right], \quad c_1 = \frac{2\pi}{h} q_m, \quad d = \frac{2\pi}{h} p_m q_m,$$

$$p_i^2 q_i^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} + \frac{h^2}{\pi^2} b^2 q_i^4.$$

Wir bemerken, daß der Koeffizient c des linearen Gliedes dem Mittelwert p_m entspricht. Dagegen hängt der Koeffizient b des quadratischen imaginären Gliedes mit dem Produkt $p_i q_i$ zusammen; für $b = 0$ hat $p_i q_i$ den von Heisenberg hervorgehobenen Minimalwert $h/2\pi$.

Man kann allgemein feststellen, daß von allen Funktionen $M(q)$ die Gaußsche Verteilung mit $b = 0$ den kleinsten Wert für das Produkt $p_i q_i$ liefert. Wir haben

$$p_i^2 = 2 \overline{(p-p_m)^2} = 2 [\overline{p^2} - 2 \overline{p p_m} + p_m^2] = 2 (\overline{p^2} - p_m^2),$$

$$\overline{p^2} = \int p^2 M(p) M^*(p) dp,$$

also nach (26)

$$p_i^2 + 2 p_m^2 = \frac{2}{h} \iiint p^2 M(q_1) M^*(q_2) e^{\frac{p}{\varepsilon}(q_1 - q_2)} dq_1 dq_2 dp$$

$$= -\frac{2\varepsilon^2}{h} \lim_{\alpha=0} \iiint M'(q_1) M'^*(q_2) e^{-\alpha^2 p^2 + \frac{p}{\varepsilon}(q_1 - q_2)} dq_1 dq_2 dp$$

$$= \frac{h}{2\pi^2} \lim_{\alpha=0} \frac{1}{\alpha} \iint M'(q_1) M'^*(q_2) e^{\frac{(q_1 - q_2)^2}{4\alpha^2 \varepsilon^2}} dq_1 dq_2,$$

$$p_i^2 + 2 p_m^2 = \frac{h^2}{2\pi^2} \int M'(q_1) M'^*(q_1) dq_1,$$

weil bei $\alpha = 0$ der Integrand doch schließlich nur für kleines $(q_1 - q_2)$ merklich von Null abweicht. Auf ähnlichem Wege findet man:

$$p_m = \int p M(p) M^*(p) dp$$

$$= \frac{ih}{2\pi} \int M'(q) M^*(q) dq = -\frac{ih}{2\pi} \int M(q) M'^*(q) dq,$$

$$2 p_m = \frac{ih}{2\pi} \int [M'(q) M^*(q) - M(q) M'^*(q)] dq.$$

Sei nun irgend eine Amplitude $M(q)$ gegeben, mit den entsprechenden Werten von q_i und p_m , so setze man

$$M(q) = f(q) M_0(q), \quad M_0(q) = C_0 e^{-\frac{(q-q_m)^2}{2q_i^2} - \frac{2\pi i}{h} p_m q}$$

Dann findet man aus obigen Formeln und der Relation $\int M M^* dq = 1$:

$$M' M'^* = \left[\frac{(q-q_m)^2}{q_i^4} + \frac{4\pi^2}{h^2} p_m^2 \right] M M^* - \frac{q-q_m}{q_i^2} \frac{d}{dq} (f f^*) M_0 M_0^* - \frac{2\pi i}{h} p_m (f f'^* - f^* f') M_0 M_0^* + f' f'^* M_0 M_0^*,$$

$$p_i^2 + 2p_m^2 = \frac{h^2}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{q_i^4} \int (q-q_m)^2 M M^* dq + \frac{4\pi^2}{h^2} p_m^2 + \frac{1}{q_i^2} - \frac{2}{q_i^4} \int (q-q_m)^2 M M^* dq - \frac{2\pi i}{h} p_m \int (f f'^* - f^* f') M_0 M_0^* dq + \int f' f'^* M_0 M_0^* dq \right\},$$

wo das erste rechts stehende Integral einfach gleich $q_i^2/2$ ist; ferner:

$$M' M'^* - M M'^* = (f^* f' - f f'^*) M_0 M_0^* - \frac{4\pi i}{h} p_m f f^* M M^*,$$

$$2p_m = \frac{i h}{2\pi} \left\{ \int (f^* f' - f f'^*) M_0 M_0^* dq - \frac{4\pi i}{h} p_m \right\};$$

also

$$\int (f^* f' - f f'^*) M_0 M_0^* dq = 0, \\ p_i^2 = \frac{h^2}{2\pi^2} \left(\frac{1}{2q_i^2} + \int f' f'^* M_0 M_0^* dq \right),$$

und, da das rechts stehende Integral nicht negativ sein kann, gilt ganz allgemein:

$$p_i q_i \geq \frac{h}{2\pi}. \quad (27)$$

Dieses ist das etwas verallgemeinerte Unbestimmtheitsgesetz von Heisenberg. Es setzt eine untere Grenze für das Produkt der Unbestimmtheitsmaße für jedes Paar kanonischer Variablen fest. Zunächst bezieht sich dieses Gesetz auf die Unbestimmtheiten in den Aussagen, die wir über die Ergebnisse von sich gegenseitig ausschließenden Experimenten machen können. Sind z. B. q und p Koordinate und Impuls eines freien Elektrons, so könnten wir zur Zeit t den Wert von q genau feststellen, etwa durch Beobachtung mit einem γ -Strahl-Mikroskop; oder

aber wir könnten den Wert von p genau feststellen, z. B. indem wir das Elektron mit monochromatischem Lichte bestrahlen und den Dopplereffekt beobachten. Die zweite Beobachtung läßt sich allerdings nicht so einfach auf einen bestimmten Zeitpunkt beziehen wie die erste (eine ähnliche Unbestimmtheit in der Zeit bei Energiemessungen wird von Heisenberg und Bohr besonders hervorgehoben), doch soll hier auf diese schwierige Frage nicht eingegangen werden. Es genügt, festzustellen, daß eine genaue Kontrolle der Frequenz bei Dopplereffektmessungen bekanntlich unendlich lange Zeit in Anspruch nimmt, während die Beobachtung von q infolge eines ungeheuren Comptonschen Rückstoßes die Bewegung stört; aus diesen Gründen ist eine gleichzeitige genaue Beobachtung von q und p prinzipiell ausgeschlossen.

$M(q) M^*(q)$ ist also die Wahrscheinlichkeitskurve für das Ergebnis einer genauen Beobachtung von q , und $M(p) M^*(p) dp$ ist die Wahrscheinlichkeitskurve für das Ergebnis einer als Alternative zu jener betrachteten genauen Beobachtung von p ; und (27) bringt eine charakteristische Relation zwischen diesen beiden Kurven zum Ausdruck.

Man kann aber auch beide Größen in einer einzigen Beobachtung messen, also wohl gleichzeitig, aber nur mit beschränkter Genauigkeit. Bei einer solchen Beobachtung fragt man in der klassischen Theorie nach dem „Fehler“ des gemessenen Wertes. Von dem neuen Standpunkt schwebt nun zunächst dieser Fehlerbegriff in der Luft, denn er setzt doch nicht nur den Begriff eines beobachteten, sondern auch den Begriff eines „wahren“ Wertes voraus, und letzteren gibt es im physikalischen Sinne nicht mehr. Anscheinend kann man die Sache so auffassen. Jede solche Beobachtung stört notwendigerweise (durch Comptonschen Rückstoß usw.) das beobachtete System; als Ergebnisse berechnen wir also entweder Werte vor der Beobachtung oder Werte nach der Beobachtung. Erstens hat nun eine durch die Beobachtung gelieferte Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wert einer Variable vor der Beobachtung wohl folgenden Sinn: eine genaue Messung dieser Variable, die man statt der tatsächlich geschehenen Beobachtung hätte anstellen können, hätte diesen Wert der Variable mit der genannten Wahrscheinlichkeit ergeben. Zweitens bilden die durch die einzige Beobachtung erlangten Wahrscheinlichkeitskurven für Werte der Variablen nach der Beobachtung eben die Anfangskurven für ein neues Wahrscheinlichkeitspaket.

In allen Fällen kann man also wohl ruhig behaupten, daß die Präzisionsmaße bei einer solchen gleichzeitigen Messung von zwei kanonisch konjugierten Variablen stets der Relation (27) unterliegen werden. Die

„Beobachtungsfehler“ erscheinen in der neuen Theorie als mit der statistischen Unbestimmtheit selbst zusammengeschmolzen.

3. Zusammenhang mit den Funktionen und Wellen von Schrödinger.

Die neue Theorie sei hier angewendet auf die Behandlung von Problemen, in denen Anfangslage und Impuls gegeben sind und nach den Werten dieser Variablen zur Zeit t gefragt wird. Um die Lösung durchzuführen, hat man dann zunächst die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen nach den Regeln der nichtkommutativen Algebra zu lösen und so die zeitliche Relation der Koordinaten und der Impulse mit den Anfangswerten zu gewinnen, und alsdann die Transformationsmatrix vom Schema der Anfangsvariablen zum Schema der Endvariablen zur Zeit t aufzusuchen. Außer in den einfachsten Fällen ist aber diese Aufgabe nicht leicht, und folgender Umweg dürfte oft eher zum Ziel führen. Wir transformieren zunächst von den Anfangsvariablen zur Energie H und erst dann wieder von der Energie zu den Endvariablen; die Funktionen für diese beiden Teiltransformationen sind dann die bekannten Schrödingerschen Funktionen (ohne Zeitfaktor). Dabei muß aber beachtet werden, daß die Matrizen im H -Schema nicht eindeutig sind; vielmehr liefert die erste Teiltransformation für die Endvariablen Matrizen, die Funktionen der Zeit sind, während die zweite von einem Matrizenystem ausgehen muß, in welchem diese Variablen ruhen. Eine Zwischentransformation im H -Schema muß also eingeschaltet werden.

Indem wir die Ausführung auf eine Dimension beschränken, sei $S_1(q_0, n_1)$ die Transformation vom q_0 -Schema zum H -Schema und $g_{0n_1n_1}, g_{n_1n_1}$ usw. die so gebildeten Matrizen, für welche die Quantenzahl n als unabhängige Variable n_1 geschrieben ist; sei $T(n_1, n_2)$ die Zwischentransformation und $S_2(n_2, q)$ die Transformation vom H -Schema, in welchem wir nun die Quantenzahl n_2 und die Matrizen $g_{0n_2n_2}, g_{n_2n_2}$ usw. schreiben, zum q -Schema. Dann muß T nach (17) folgende Gestalt haben, damit sie H diagonal lasse:

$$T(n_1, n_2) = e^{i\varphi(n, t)} \delta(n_1 - n_2),$$

und, wenn g für q oder p steht, so gilt:

$$\begin{aligned} g_{n_1n_2} &= T_{n_1n_2} g_{n_2n_2} T_{n_2n_1}^{-1} \\ g(n'_1, n''_1) &= \int e^{i\varphi(n'_1, t)} \delta(n'_1 - n'_2) dn'_2 g(n'_2, n''_2) dn''_2 e^{-i\varphi(n''_2, t)} \delta(n''_2 - n''_1) \\ &= g(n'_2 = n'_1, n''_2 = n''_1) e^{i[\varphi(n'_1, t) - \varphi(n''_1, t)]}, \end{aligned}$$

also

$$\dot{g}(n'_1, n''_1) = i g(n'_1, n''_1) [\varphi_t(n'_1, t) - \varphi_t(n''_1, t)],$$

da $g_{n_2 n_2}$ von der Zeit unabhängig. Nun genügt $g_{n_1 n_1}$ den Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{g}_{n_1 n_1} = \frac{1}{\varepsilon} (H g - g H), \quad \dot{g}(n'_1, n''_1) = \frac{1}{\varepsilon} (H_{n'_1} - H_{n''_1}) g(n'_1, n''_1);$$

also ist

$$\varphi_t(n'_1, t) - \varphi_t(n''_1, t) = \frac{1}{i\varepsilon} (H_{n'_1} - H_{n''_1}),$$

$$\varphi(n, t) = \frac{1}{i\varepsilon} H_n t + \delta(n) + \beta(t).$$

Für $t = 0$ muß $g_{n_2 n_2} = g_{n_1 n_1}$ sein, also ist $\delta(n) + \beta(0) = \text{Const}$, wofür wir einfach $\delta(n) = 0$ setzen wollen.

Sei nun

$$S(q_0, n_1) = \psi(q_0, n_1), \quad S(n_2, q) = \psi^*(q, n_2),$$

wo $\psi(q, n)$ die Schrödingersche Funktion oder normierte Lösung von

$$H\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi(q, n) = H_n \psi(q, n) \quad (28)$$

ist. Dann ist die Gleichung

$$S_{q_0 q} = S_{q_0 n_1}, \quad T_{n_1 n_2} S_{n_2 q}$$

gleichbedeutend mit

$$S(q_0, q) = \int \psi(q_0, n) \psi^*(q, n) e^{\frac{1}{\varepsilon} H_n t + i\beta(t)} dn. \quad (29)$$

Es fällt sofort auf, daß nicht nur $S(q_0, q)$, sondern auch die daraus zu berechnende Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$M(q) = \int M(q_0) S(q_0, q) dq_0 \quad (30)$$

eine etwas erweiterte Schrödingersche Wellengleichung befriedigt, so z. B.

$$\varepsilon \frac{\partial M}{\partial t} = H\left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial q}, q\right) M + i\varepsilon \beta'(t) M$$

[ψ^* befriedigt (28) mit $-\varepsilon$ für ε]. Bei Schrödinger ist nur $\beta'(t) = 0$, aber dieser Unterschied ist unwesentlich; M enthält nur einen physikalisch belanglosen Faktor $\exp[i\beta(t)]$, der sich beliebig mit der Zeit ändern kann, eben wie etwa dem Geschwindigkeitspotential eine ähnliche additive Konstante $\chi(t)$ zugefügt werden kann und dementsprechend ein neues Glied in die Differentialgleichung hereinkommt, ohne daß irgend etwas physikalisches passiert. Unsere Wahrscheinlichkeitsamplitude ent-

spricht auch der zum gewöhnlichen Schrödingerschen Feldskalar konjugiert komplexen Funktion.

Wir sind also zu folgender Aussage geführt, indem wir die einfache Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf mehrere Freiheitsgrade vorzunehmen; die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Lagenkoordinaten breitet sich bei passender Wahl des willkürlichen Faktors nach der Schrödingerschen Wellengleichung aus. Das „Wahrscheinlichkeitspaket“ $M(q)M^*(q)$ kann also auch als Schrödingersches Wellenpaket aufgefaßt werden; in der Tat stellt (30) nichts anderes dar als die Entwicklung von $M(q)$ nach den konjugierten Eigenfunktionen ψ^* , jede mit einem für die Normierung belanglosen die Zeit enthaltenden Faktor belastet.

Im Lichte dieses Ergebnisses wird man fragen, worin denn überhaupt der Vorteil der etwas abstrakten Matrixtheorie liegt, und ob man nicht die Wellengleichung zum einzigen Fundament erheben solle. Im Bereich der Elektronenmechanik hätte dieses allerdings den Nachteil, daß dann ein zweites unabhängiges Postulat anscheinend nötig wäre, um von den Koordinaten zu den Impulsen überzugehen; es sei denn, daß eine einschlägige Untersuchung davon, was man eigentlich als Geschwindigkeit oder Impuls mißt, diese Notwendigkeit beseitigen und die Impulse im Grunde genommen vielleicht immer nur als Differentialoperatoren würde erscheinen lassen. Der Haupteinwand gegen die alleinige Benutzung der Wellengleichung liegt wohl in folgender Überlegung:

Betrachten wir ein freies Elektron, dessen Wahrscheinlichkeitspaket schon beim Ausdehnen eine erhebliche Größe erreicht hat. Es scheint kaum angebracht, die Elektrizität als über das Paket verteilt zu denken, etwa mit Dichte $\psi\psi^* = MM^*$, weil eine Beobachtung etwa mit einem γ -Strahlmikroskop zu jeder Zeit die ganze Ladung in irgend einem einzigen Punkte entdecken kann. Die Folge einer solchen Beobachtung ist in der Tat merkwürdig. Im Augenblick, da wir die Lage des Elektrons so feststellen, verliert das ursprüngliche Paket jegliche weitere physikalische Bedeutung; wir müssen ein neues kleineres Paket an seine Stelle treten lassen. Es will doch scheinen, daß ein höherer Grad von Wirklichkeit noch immer dem Elektron als Partikel zukommt als dem Wellenpaket.

Über die statistische, diskontinuierliche Deutung der mathematischen Formeln können also kaum Zweifel bestehen; hinsichtlich der mathematisch-technischen Durchführung wird es von dem gestellten Problem abhängen, welche Methode vorzuziehen sei.

Beispiel der freien Bewegung. Hier können wir setzen $H = p^2/2m$, und die Schrödingersche Gleichung und ihre normierte Lösung heißen:

$$\frac{\varepsilon^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = H \psi, \quad \psi = \sqrt{\frac{1}{h}} \sqrt{\frac{m}{2}} H^{-1/4} e^{\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{2mH} x}.$$

Zur Kontrolle der angegebenen Normierung bemerke man, daß

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha=0} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2}} \int dH' \int \frac{dx}{(H'H'')^{1/4}} e^{\frac{1}{\varepsilon} [\sqrt{2mH''} - \sqrt{2mH'}] x - \alpha^2 x^2} \\ = \lim_{\alpha=0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha h} \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dH'}{(H'H'')^{1/4}} e^{\frac{m}{2\alpha^2 \varepsilon^2} (\sqrt{H''} - \sqrt{H'})^2} = 1, \end{aligned}$$

da der Integrand doch schließlich nur bei $H' = H''$ merklich von Null abweicht. Dann liefert (29), wenn wir $n = H$ setzen:

$$S(q_0, q) = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dH}{\sqrt{H}} e x p \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{2mH} (x_0 - x) + \frac{1}{2} H t + i \beta(t) \right\},$$

oder, wenn wir zunächst t/ε durch $(-\alpha^2 + t/\varepsilon)$ ersetzen und dann α gegen Null gehen lassen,

$$S(q_0, q) = \sqrt{\frac{im}{ht}} e^{-\frac{m}{2\varepsilon t} (x-x_0)^2 + i\beta(t)}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem unten auf direktem Wege gefundenen [man setze $g = 0$ in (31)].

4. Drei einfache Bewegungstypen.

Es ist ein großer Vorteil der neuen Theorie, daß die klassisch einfachen Bewegungen wieder verhältnißmäßig einfach zu behandeln sind. Neben dem durch Heisenberg behandelten Fall der kräftefreien Bewegung eines Elektrons sollen hier die Lösungen für drei einfache Krafttypen dargestellt werden.

A. Elektron im homogenen elektrischen Felde. Sei das Feld der x -Achse parallel und betrachten wir nur die Bewegung in diese Richtung; sei die Kraft $= -mg$, wo $m =$ Masse des Elektrons. Dann sind die Hamiltonsche Funktion und die Lösung der Hamiltonschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \xi^2 + mgx, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \xi_0 \frac{t}{m} - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{1}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \xi \frac{t}{m} - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{1}, \end{aligned}$$

wo ξ den Impuls und x_0, ξ_0 Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ bedeuten. Dann liefern (14) und (21) (man setze x_0 für x und x für $z = n$):

$$\left\{ \frac{\varepsilon t}{m} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 - \frac{1}{2} g t^2 - x \right\} S(x_0, x) = 0, \quad \left\{ \frac{\varepsilon t}{m} \frac{\partial}{\partial x} + x - \frac{1}{2} g t^2 - x_0 \right\} S(x_0, x) = 0;$$

$$S(x_0, x) = \sqrt{\frac{i m}{h t}} e^{-\frac{m}{2 \varepsilon t} (x - x_0)^2 - \frac{m g t}{2 \varepsilon} (x + x_0) + i \varphi(t)}, \quad (31)$$

wo $\varphi(t)$ willkürlich ist (in den folgenden Beispielen wird dieses Glied weggelassen). Der Normierungsfaktor wird gefunden, indem man C dafür einsetzt und fordert:

$$\lim_{\alpha=0} C C^* \iint dx' dx_0 e x p \left\{ - \left(\alpha^2 - \frac{m}{2 \varepsilon t} \right) (x' - x_0)^2 - \left(\alpha^2 + \frac{m}{2 \varepsilon t} \right) (x'' - x_0)^2 + \frac{m g t}{2 \varepsilon} (x'' - x') \right\} = 1;$$

das i im Zähler wird hier eingeführt, um die Wahrscheinlichkeitsamplitude bei $t = 0$ stetig zu erhalten.

Ist nun

$$M(x_0) = C_0 e^{-\frac{(x_0 - x_m)^2}{2 x_i^2} - \frac{2 \pi i}{h} x_m (x_0 - x_m)} \quad (32)$$

die Wahrscheinlichkeitsamplitude für x_0 bei $t = 0$, und

$$M(\xi_0) = C_0 \sqrt{\frac{x_i}{\xi_i}} e^{-\frac{(\xi_0 - \xi_m)^2}{2 \xi_i^2} + \frac{2 \pi i}{h} x_m \xi_0}, \quad (33)$$

wo $x_i^2 \xi_i^2 = h^2/4 \pi^2$, die entsprechende Amplitude für ξ [vgl. Gl. (26) oben], so ist die Amplitude für x bei $t = t$: $\int M(x_0) S(x_0, x) dx_0$ oder

$$M(x) = C_0 \sqrt{\frac{2 \pi i m x_i^2}{h t + 2 \pi i m x_i^2}} \exp. \left\{ - \frac{(x - \frac{t}{m} \xi_m + \frac{1}{2} g t^2 - x_m)^2}{2 (x_i^2 + \frac{t^2}{m^2} \xi_i^2)} + i P \right\}, \quad (34)$$

wo

$$P = \frac{\frac{h t}{2 \pi m x_i^2} \left(x + \frac{1}{2} g t^2 - x_m \right)^2 + \frac{4 \pi}{h} x_i^2 \xi_m \left(x - x_m - \frac{t}{2 m} \xi_m \right)}{2 \left(x_i^2 + \frac{t^2}{m^2} \xi_i^2 \right)} + \frac{\pi}{h} m g t \left(2 x + \frac{1}{4} g t^2 \right) + \varphi(t)$$

und $\varphi(t)$ reell aber sonst willkürlich ist. Für $g = 0$ stimmt dies mit der Heisenbergschen Formel für die kräftefreie Bewegung. Die Ampli-

tude für ξ kann man nun aus der Formel $\int M(x) S(x, \xi) dx$ berechnen, aber es ist wohl leichter zunächst

$$S(x_0, \xi) = \int S(x_0, x) S(x, \xi) dx$$

$$\lim_{\alpha=0} C_0 \sqrt{\frac{i m}{h t}} \int \exp \left\{ - \left(\alpha + \frac{m}{2 \varepsilon t} \right) (x - x_0)^2 - \frac{m g t}{2 \varepsilon} (x + x_0) + \frac{x \xi}{\varepsilon} \right\} dx$$

$$= C_0 \sqrt{\frac{x_0}{\xi}} \exp \left\{ \frac{x_0}{\varepsilon} (\xi + m g t) + \frac{t}{2 m \varepsilon} \left(\xi + \frac{m g t}{2} \right)^2 \right\}$$

zu berechnen und erst daraus $M(\xi) = \int M(x_0) S(x_0, \xi) dx_0$:

$$M(\xi) = C_0 \sqrt{\frac{x_0}{\xi}} \exp \left\{ - \frac{(\xi + m g t - \xi_m)^2}{2 \xi_i^2} + \frac{2 \pi i}{h} x_m (\xi + m g t) + \frac{i \pi t}{h m} \left(\xi + \frac{m g t}{2} \right)^2 + i \varphi_2(t) \right\} \quad (35)$$

Die Erweiterung obiger Ergebnisse auf zwei bzw. drei Dimensionen liegt auf der Hand. Die Bewegungen in senkrechten Richtungen sind, wie in der klassischen Theorie, unabhängig voneinander; die Wahrscheinlichkeitsamplitude ist einfach das Produkt der Amplituden für die verschiedenen Richtungen.

Diese Gleichungen zeigen, daß hier wieder, wie von Heisenberg bei der kräftefreien Bewegung gefunden, alles wie in der klassischen Theorie vor sich geht. Es breitet sich das x -Paket aus wie z. B. eine Ladung Schrot, in welcher jedes Schrotkorn eine durch seine Anfangslage und Bewegung bestimmte Bahn beschreibt, und die ganze Ladung sich mit der Zeit ausbreitet infolge von Verschiedenheiten in diesen Anfangsbedingungen; diese Zerstreuung ist von der Fallbewegung ganz unabhängig. Die Bewegung des Elektrons kann man, wenn man es will, in ganz derselben Weise auffassen, nur daß hier eine Wahrscheinlichkeit an Stelle der Verteilung der einzelnen Schrotkörner tritt. Anfangs haben wir Wahrscheinlichkeitskurven $M(x_0) M^*(x_0)$ für die Lage und $M(\xi_0) M^*(\xi_0)$ für den Impuls des Elektrons; setzt man nun diese als unabhängige Wahrscheinlichkeiten an und berechnet daraus ganz klassisch die Wahrscheinlichkeitskurven für Lage und Impuls zur Zeit t , so bekommt man genau die aus (34) und (35) für $M(x) M^*(x)$ und $M(\xi) M^*(\xi)$ hervorgehenden Ausdrücke. Das kann durch Rechnung direkt bewiesen werden, leuchtet aber wohl durch folgende Überlegung ohne Rechnung ein. Eine

solche Rechnung muß sicher wieder eine Gaußsche Verteilung im Wahrscheinlichkeitspaket ergeben, und das Paketzentrum wird eine klassische Fallbewegung ausführen; das tut aber das Zentrum des in (34) und (35) angegebenen Pakets, wofür

$$x = x_m + \frac{t}{m} \xi_m - \frac{1}{2} g t^2, \quad \xi = \xi_m - m g t.$$

Als neue Präzisionsmaße ergeben sich auch aus den Präzisionsmaßen x_i und ξ_i für die Anfangsvariablen genau die in (34) und (35) erscheinenden Werte. Es müssen also die ganz klassisch berechneten „Wahrscheinlichkeitspakete“ für das Elektron vollständig mit den nach der Quantentheorie berechneten übereinstimmen.

Der einzige Unterschied in der Quantentheorie gegenüber der klassischen liegt also in diesem Falle in der unumgänglichen Unbestimmtheit der Anfangswahrscheinlichkeiten. In der klassischen Theorie konnten Anfangslage und Impuls mit beliebiger Genauigkeit gegeben werden. In der Quantentheorie hängt die Bewegung ganz in der klassischen Weise von den Anfangsbedingungen ab, aber die Unbestimmtheit in diesen selbst läßt sich nicht unter eine gewisse Quantengrenze herabdrücken. Eben die Diffusion des Wahrscheinlichkeitspakets ist in diesem Falle wie bei der kräftefreien Bewegung für diese Identität des klassischen und des quantentheoretischen Ergebnisses wesentlich.

B. Homogenes Magnetfeld. Es genügt, die Bewegung in einer dem Felde senkrechten Ebene zu verfolgen; die Bewegung parallel zum Felde ist frei. Als Hamiltonsche Funktion nehmen wir:

$$H = \frac{1}{2m} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\omega}{2} (y\xi - x\eta) + \frac{m\omega^2}{8} (x^2 + y^2),$$

wobei x, y Koordinaten und ξ, η Impulse sind und $\omega = \frac{eH_0}{mc}$, H_0 = magnetische Feldstärke, e/c = Elektronenladung in elektromagnetischen Einheiten. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m} \xi + \frac{\omega}{2} y, & \dot{\xi} &= \frac{\omega}{2} \eta - \frac{1}{4} m \omega^2 x, \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} \eta - \frac{\omega}{2} x, & \dot{\eta} &= -\frac{\omega}{2} \xi - \frac{1}{4} m \omega^2 y, \end{aligned}$$

deren Lösungen sind:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(1+c)x_0 + \frac{s}{2}y_0 + \frac{s}{m\omega}\xi_0 + \frac{1-c}{m\omega}\eta_0, \\y &= -\frac{s}{2}x_0 + \frac{1}{2}(1+c)y_0 - \frac{1-c}{m\omega}\xi_0 + \frac{s}{m\omega}\eta_0, \\ \xi &= \frac{1}{2}(1+c)\xi_0 + \frac{s}{2}\eta_0 - \frac{m\omega s}{4}x_0 - \frac{m\omega}{4}(1-c)y_0, \\ \eta &= -\frac{s}{2}\xi_0 + \frac{1}{2}(1+c)\eta_0 + \frac{m\omega}{4}(1-c)x_0 - \frac{m\omega s}{4}y_0,\end{aligned}$$

wo $s = \sin \omega t$, $c = \cos \omega t$. Dann haben wir für die Transformationsmatrix $S(x_0, y_0; x, y)$:

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\varepsilon}{m\omega} \left[s \frac{\partial}{\partial x_0} + (1+c) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] + \frac{1}{2}(1+c)x_0 + \frac{s}{2}y_0 - x \right\} S &= 0, \\ \left\{ \frac{\varepsilon}{m\omega} \left[-(1-c) \frac{\partial}{\partial x_0} + s \frac{\partial}{\partial y_0} \right] - \frac{s}{2}x_0 + \frac{1}{2}(1+c)y_0 - y \right\} S &= 0.\end{aligned}$$

Die auf die übliche Weise normierte Lösung ist:

$$S(x_0, y_0; x, y) = \frac{im\omega}{2h} \sqrt{\frac{2}{1-c}}$$

$$\exp. \left\{ -\frac{m\omega}{4\varepsilon s(1-c)} [s^2(x-x_0)^2 + s^2(y-y_0)^2 + 2s(1-c)(x_0y - xy_0)] \right\}.$$

In dieser Form befriedigt die Lösung auch die umgekehrten Gleichungen [vgl. (21) oben], die wir hier nicht anführen.

Ist nun die Amplitude zur Zeit $t = 0$:

$$M(x_0, y_0) = C'_0 \exp. \left\{ -\frac{(x_0 - x_m)^2}{2x_i^2} - \frac{(y_0 - y_m)^2}{2y_i^2} - \frac{2\pi i}{h} \xi_m(x_0 - x_m) - \frac{2\pi i}{h} \eta_m(y_0 - y_m) \right\},$$

so ist

$$M(x, y) = \iint M(x_0, y_0) S(x_0, y_0; x, y) dx_0 dy_0$$

oder

$$M(x, y) = C' \exp. \left\{ \frac{\left[sx - (1-c)y - sx_m + \frac{2\xi_m}{m\omega}(1-c) \right]^2 + iP}{2s^2x_i^2 + \frac{8}{m^2\omega^2}(1-c)^2\xi_i^2} - \frac{\left[(1-c)x + sy - sy_m + \frac{2}{m\omega}(1-c)\eta_m \right]^2 + iQ}{2s^2y_i^2 + \frac{8}{m^2\omega^2}(1-c)^2\eta_i^2} \right\}, \quad (36)$$

wo P und Q reelle Ausdrücke sind, C' die Zeit t aber weder x noch y enthält, und

$$\xi_i = \frac{h}{2\pi x_i}, \quad \eta_i = \frac{h}{2\pi y_i}.$$

Die Koordinaten \bar{x} , \bar{y} der mittleren Lage oder des Paketentrums sind diejenigen Werte von x und y , die den reellen Teil des Exponenten Null machen; man findet dafür:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2}(1+c)x_m + \frac{s}{2}y_m + \frac{s\xi_m}{m\omega} + \frac{1-c}{m\omega}\eta_m, \\ \bar{y} &= -\frac{s}{2}x_m + \frac{1}{2}(1+c)y_m - \frac{1-c}{m\omega}\xi_m + \frac{s}{m\omega}\eta_m. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen für die Bewegung des Paketentrums mit den Anfangswerten x_m , y_m , ξ_m , η_m besitzen genau dieselbe Gestalt wie obige Gleichungen für x , y , welche, als gewöhnliche Gleichungen betrachtet, die klassische Bewegung eines Elektrons mit den Anfangswerten x_0 , y_0 , ξ_0 , η_0 darstellen. Es führt also das Paketzentrum wieder, wie im elektrischen Felde, einfach eine klassische Bewegung aus.

Auch stimmen wieder die Präzisionsmaße mit den klassischen. Das sieht man am leichtesten, wenn man aus obigen Gleichungen für x , y die Werte der in den Zählern in (36) auftretenden Zusammensetzungen berechnet:

$$\begin{aligned} sx - (1-c)y &= sx_0 + \frac{2(1-c)}{m\omega}\xi_0, \\ (1-c)x + sy &= sy_0 + \frac{2(1-c)}{m\omega}\eta_0. \end{aligned}$$

Wenn x_i , ξ_i , y_i , η_i die Präzisionsmaße für x_0 usw. sind, so sind die klassisch berechneten quadrierten Präzisionsmaße für die genannten Zusammensetzungen von x und y :

$$s^2 x_i^2 + \frac{4(1-c)}{m^2 \omega^2} \xi_i^2, \quad s^2 y_i^2 + \frac{4(1-c)^2}{m^2 \omega^2} \eta_i^2,$$

und diese stimmen mit den Nennern (ohne Faktor 2) in (36) überein.

Es muß also wieder, wie im elektrischen Felde, die quantentheoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung für x und y vollständig mit der klassisch berechneten übereinstimmen.

Sehr interessant ist es, daß das magnetische Feld die Zerstreung des Pakets, welche bei einem freien Elektron stattfindet, gerade aufhebt; die Ausdehnung des Pakets unterliegt nur Schwankungen mit der doppelten Larmorschen Frequenz $\omega/2\pi$. So ist es wieder in der klassischen

Theorie: eine kleine Schar von Elektronen mit nahezu gleicher Geschwindigkeit würde in einem homogenen Magnetfeld Kreise mit derselben Winkelgeschwindigkeit beschreiben.

C. Harmonischer Oszillator. Hier kann gesetzt werden im eindimensionalen Falle:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \xi^2 + \frac{\omega^2 m}{2} x^2, & \dot{x} &= \frac{1}{m} \xi, & \dot{\xi} &= -\omega^2 m x, \\ x &= x_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega m} \xi_0 \sin \omega t, & \xi &= -\omega m x_0 \sin \omega t + \xi_0 \cos \omega t, \\ x_0 &= x \cos \omega t - \frac{1}{\omega m} \xi \sin \omega t, \end{aligned} \right\} (37)$$

also

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\varepsilon}{\omega m} \sin \omega t \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \cos \omega t - x \right\} S &= 0, \\ \left\{ \frac{\varepsilon}{\omega m} \sin \omega t \frac{\partial}{\partial x} + x \cos \omega t - x_0 \right\} S &= 0, \\ S(x_0, x) &= \sqrt{\frac{i \omega m}{h \sin \omega t}} \exp \left\{ -\frac{\omega m}{2 \varepsilon} [(x^2 + x_0^2) \cot \omega t - 2 x x_0 \csc \omega t] \right\}. \end{aligned}$$

Aus einem Anfangspaket (32) erhält man dann

$$\begin{aligned} M(x) &= C_0 \sqrt{\frac{2 \pi i \omega m x_i^2}{h \sin \omega t + 2 \pi i m x_i^2 \cos \omega t}} \\ &\exp. \left\{ \frac{(\omega m x - \omega m x_m \cos \omega t - \xi_m \sin \omega t)^2 + i P}{2 [\omega^2 m^2 x_i^2 \cos^2 \omega t + \xi_i^2 \sin^2 \omega t]} \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

wo

$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega m h}{2 \pi x_i^2} (x - x_m \cos \omega t)^2 \tan \omega t + \frac{4 \pi \omega^2 m^2 x_i^2}{h} \xi_m (x - x_m \cos \omega t) \cos \omega t \\ &\quad - \frac{\pi \omega m x_i^2}{h} \xi_m^2 \sin 2 \omega t + \frac{2 \pi \omega m}{h} x^2 (\omega^2 m^2 x_i^2 \cos^2 \omega t + \xi_i^2 \sin^2 \omega t) \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Um zu ξ überzugehen, berechnet man wieder am einfachsten

$$S(x_0, \xi) = \int S(x_0, x) S(x, \xi) dx = \frac{1}{\sqrt{h}} \int S(x_0, x) \exp. \left(\frac{x \xi}{\varepsilon} \right) dx$$

und erst dann

$$M(\xi) = \int M(x_0) S(x_0, \xi) dx_0;$$

so erhält man:

$$M(\xi) = C' \exp \left\{ \frac{(\xi + \omega m x_m \sin \omega t - \xi_m \cos \omega t)^2 + i Q}{2 [\omega^2 m^2 x_i^2 \sin^2 \omega t + \xi_i^2 \cos^2 \omega t]} \right\}.$$

Die Gleichungen (37) sind auch in diesem Falle die klassischen, und es erhellt wieder aus (38), daß das Zentrum des Pakets die klassische Bewegung ausführt:

$$x = x_m \cos \omega t + \frac{\xi_m}{\omega m} \sin \omega t = \sqrt{x_m^2 + \frac{\xi_m^2}{\omega^2 m^2}} \sin(\omega t + \gamma). \quad (39)$$

Die Präzisionsmaße

$$x_{i,i}^2 = x_i^2 \cos^2 \omega t + \frac{\xi_i^2}{\omega^2 m^2} \sin^2 \omega t, \quad \xi_{i,i}^2 = \omega^2 m^2 x_i^2 \sin^2 \omega t + \xi_i^2 \cos^2 \omega t$$

sind auch wieder die sich klassisch aus (37) ergebenden. Also verläuft alles auch in diesem Falle genau wie nach der klassischen Theorie.

Es ist interessant, daß hier $\omega^2 m^2 x_{i,i}^2 + \xi_{i,i}^2 = \text{const}$ ist, während (da $x_i \xi_i = \frac{h}{2\pi}$ gewählt wurde)

$$\omega^2 m^2 x_{i,i}^2 \xi_{i,i}^2 = \omega^2 m^2 \frac{h^2}{4\pi^2} + (\omega^2 m^2 x_i^2 - \xi_i^2)^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t.$$

Hier nimmt also $x_{i,i} \xi_{i,i}$ den Minimalwert $h/2\pi$ nur zweimal in jeder Schwingung an. Eine Ausnahme tritt nur dann auf, wenn $\omega^2 m^2 x_i^2 = \xi_i^2$, in welchem Falle das Paket eine zeitlich konstante Ausdehnung besitzt; ein solches Paket hat Schrödinger¹ aus seinen Eigenfunktionen zusammengesetzt. Auch dieses Verhalten ist wieder ganz klassisch: eine kleine Schar von Partikeln in demselben harmonischen Felde bleibt beisammen, aber ihre Ausdehnung unterliegt im allgemeinen rhythmischen Schwankungen.

Merkwürdig ist es, daß hier keine Spur von Quantisierung zutage tritt; die Amplitude der Sinusbewegung des Zentrums in (39) kann jeden beliebigen Wert annehmen. Trotzdem kann man dies auch so auffassen, daß sich die Partikel „in Wirklichkeit“ stets in einem quantisierten Zustand befindet, nur tritt dieser Sachverhalt erst durch eine Messung der Energie als physikalische Tatsache in Erscheinung. Das kleinstmögliche Paket ist dazu gerade groß genug: es ist durchschnittlich am kleinsten, wenn $x_i \xi_i = \frac{h}{2\pi}$ und $\omega m x_i = \xi_i$, und hat dann eine gesamte Ausdehnung von ungefähr

$$2 x_i = 2 \sqrt{\frac{h}{2\pi \omega m}}.$$

Bei einer klassisch gerechneten „quantisierten Bewegung“ des Paket-zentrums mit Quantenzahl n wäre nach (39)

$$H = \frac{1}{2} \omega^2 m \left(x_m^2 + \frac{\xi_m^2}{\omega^2 m^2} \right) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{h \omega}{2\pi}$$

¹ E. Schrödinger, Naturw. 14, 664, 1926.

also etwa für die Amplituden an den Umkehrpunkten:

$$x_m^0 = \sqrt{(2n+1) \frac{h}{2\pi\omega m}}.$$

Offenbar ist der größte Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quantenbewegungen, nämlich derjenige zwischen denen für $n = 0$ und $n = 1$, ungefähr ebenso groß wie das durchschnittlich kleinstmögliche Paket. Allerdings könnte man die Größe des Pakets etwa am Ende seines Ausschlags beliebig klein machen, dafür aber besitzt es eine ungeheure Größe beim Durchgang durch den Mittelpunkt. Deshalb scheint es natürlicher und konsequenter zu sein, bei der Besprechung der Bewegung überhaupt nicht von Quantisierung zu reden, sondern letztere als eine Eigenschaft anderer Variablen, wie der Energie, zu betrachten.

Diese Ergebnisse lassen sich alle sehr leicht auf mehr Dimensionen übertragen; die in zwei senkrechten Richtungen erfolgenden Bewegungen sind wieder unabhängig wie in der klassischen Theorie, und das Paketzentrum bewegt sich auf einer Ellipse beliebiger Größe und Gestalt. Die Quantisierung betrifft wieder nur die Energie.

Schlußbemerkung. In den hier behandelten drei Fällen haben wir keinerlei quantentheoretische Abweichung von den klassischen Ergebnissen gefunden. Die einzige quantenhafte Eigentümlichkeit in solch einfachen Fällen liegt in der durch das Heisenbergsche Unbestimmtheitsgesetz festgesetzten prinzipiellen Unbestimmtheit der Anfangswerte. Dieser Umstand liegt zweifellos daran, daß in den obigen Fällen die quantentheoretischen Lösungen der Bewegungsgleichungen der Form nach mit den klassischen übereinstimmen. Erst in Fällen, wo die Form dieser Lösungen durch die der Quantentheorie eigentümliche nichtkommutative Multiplikation beeinflußt wird, ist eine Abweichung von den klassischen Ergebnissen zu erwarten, die nicht quantitativ durch einfache Übertragung der Unbestimmtheitsrelation auf die klassischen Formeln gewonnen werden kann.

Den Herren Professoren Bohr und Darwin bin ich für viele wertvolle Diskussionen und Bemerkungen zu Dank verpflichtet. Herrn Dr. Heisenberg möchte ich auch für viele Anregungen und kritische Urteile herzlichsten Dank sagen.