KERI 한국전기연구원

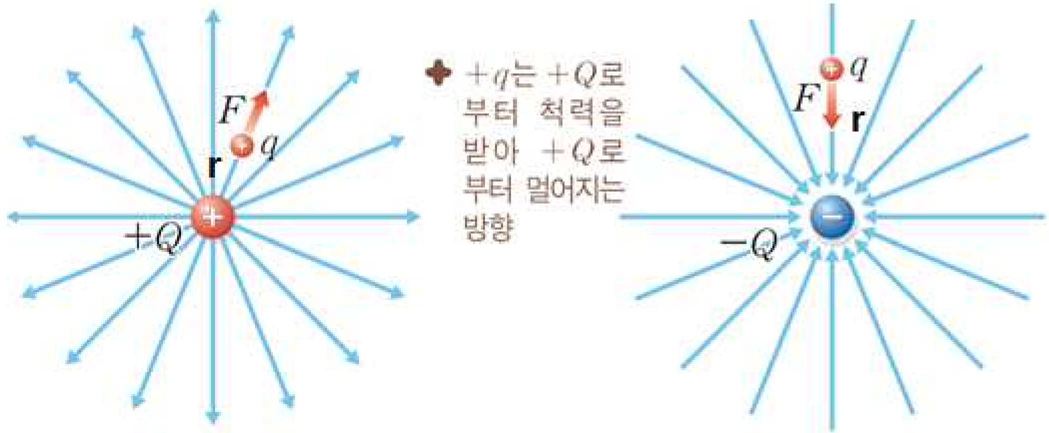
전자기학을 위한 좌표계

정 진 교

E-mail : jkchong@keri.re.kr
Blog : http://blog.daum.net/chongjinkyo

목 차

1. 좌표계의 필요성



양(+)전하 주위의 전기력선 음(−)전하 주위의 전기력선

- 쿨롱의 법칙

  – 두 전하 사이에 작용하는 힘을 계산

$$F = k\frac{q_1 \times q_2}{r^2}$$

k는 쿨롱 상수

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755 \times 10^9 [Nm^2/C^2]$$

q_1, q_2는 전하의 크기

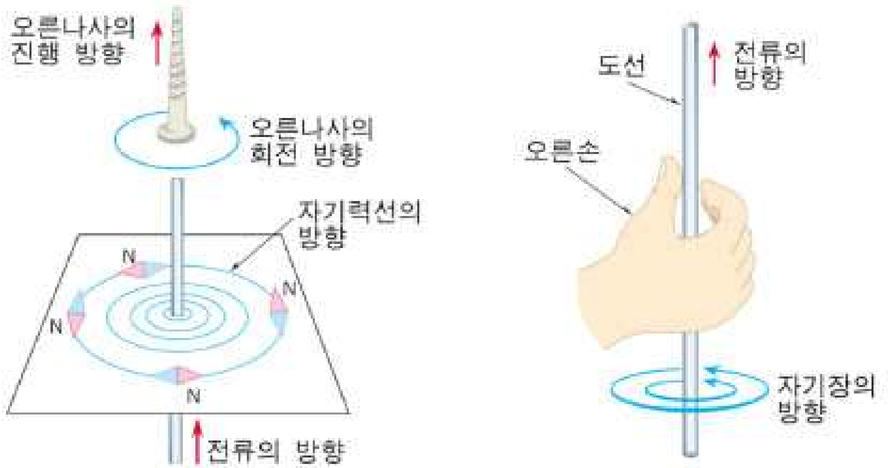
r은 두 전하 사이의 거리

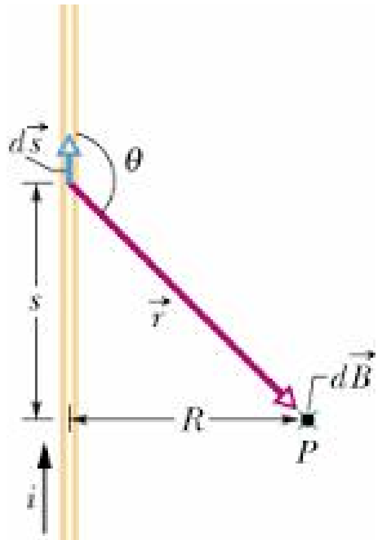
- 힘의 세기가 동일한 값은 전하 사이의 거리가 r인 '구'의 형상이 됨.

- 구를 표현하는 좌표계를 도입

유전율 $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} = 8.8541878176\ldots \times 10^{-12}$ F/m

1. 좌표계의 필요성





- 비오-사바르법칙 **[직선 도선 주위의 자기장의 방향]**

 - 선전류에 의하면 만들어지는 자기장의 밀도 즉, 자속밀도를 계산

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

- 자속밀도의 크기는 원통형상을 구성하므로 원통좌표계를 도입할 필요가 있음

참조 : 자기장이 오른나사방향으로 생성된다는 말은 나침반 N극이 반시계방향으로 정열한다는 것을 다르게 표현

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, T \cdot m / A$$

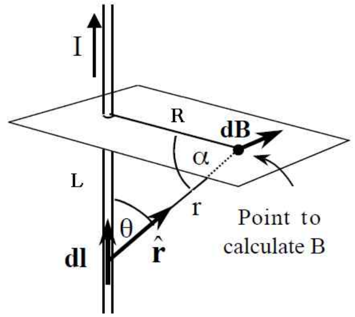
; 자유 공간의 투자율

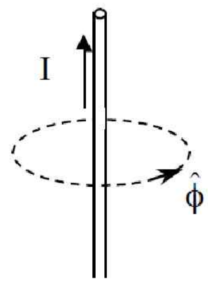
1. 좌표계의 필요성

● 선전류에 의한 자속밀도 $\vec{B}$의 크기

$$\vec{dl}\times\vec{r} = dl\sin\theta$$

X : 벡터의 외적





$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}d\hat{\phi}$$

$$\frac{L}{R}=\tan\alpha,\ dl = R\sec^2\alpha\, d\alpha,\ r = R\sec\alpha(\ \cos\alpha = R/r\ ),\ \theta = \frac{\pi}{2}-\alpha$$

를 대입하여 정리하면

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I(R\sec^2\alpha\, d\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{(R\sec\alpha)^2}\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\cos\alpha}{R}d\alpha\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int\cos\alpha\, d\alpha\hat{\phi}$$

적분구간 $\alpha = -\frac{\pi}{2}$에서 $\alpha = \frac{\pi}{2}$를 대입하여 정리하면

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\hat{\phi}$$

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

c : 빛의 속도

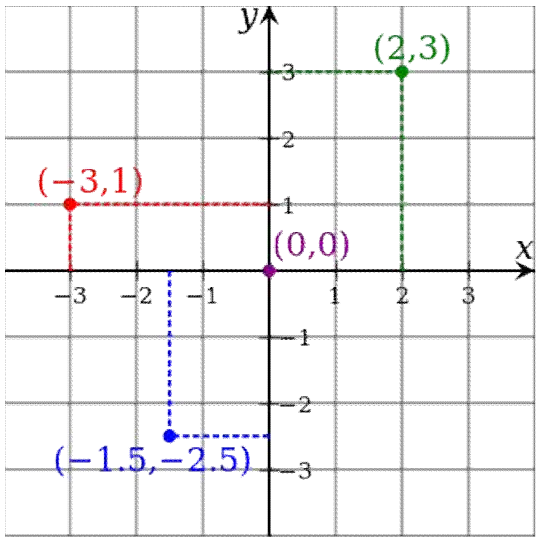
세부사항은 뒤에서 설명

2. 2차원 직교좌표와 극좌표

- 직교좌표 : (x,y)

– 직교좌표를 최초로 발명한 프랑스의 수학자 데카르트의 이름을 따 ‘데카르트 좌표계’(Cartesian coordinate system)라고도 함

– 3차원의 원통좌표, 구좌표도 직교좌표계에서 속하기 때문에 일반적으로 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표로 구분

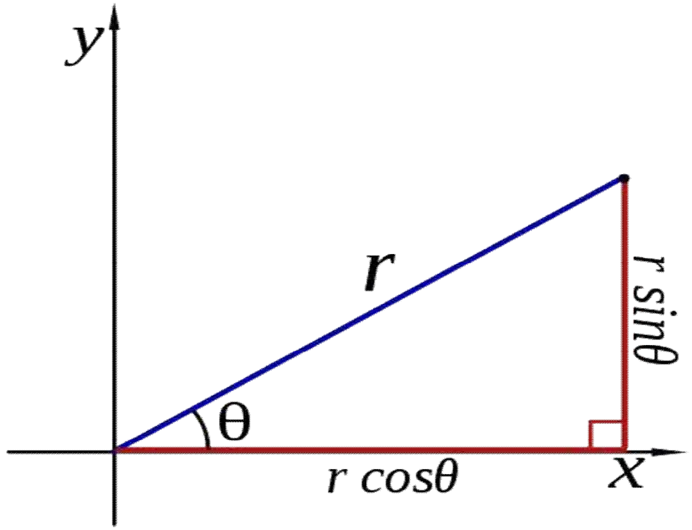


- 극좌표 : (r,θ)

– 원의 방정식 : 피타고라스 법칙을 적용하면 다음과 같이 구할 수 있음

$$r\cos\theta + r\sin\theta = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



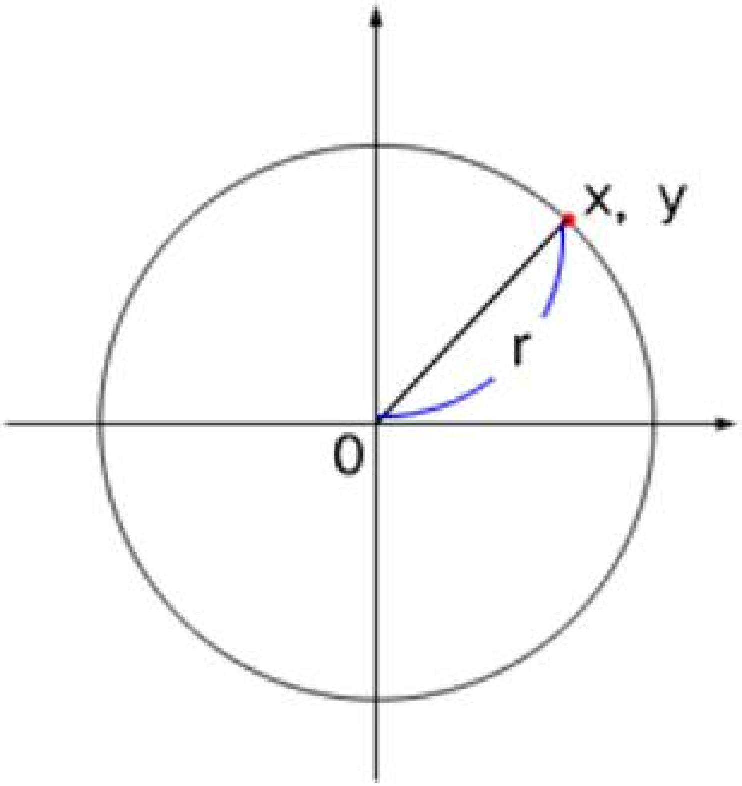
3. 원의 방정식 그리고 미분

- 피타고라스 정리에 의하여 유도된 원의 방정식
  - 음함수 표기 : f(x,y)=0

$$x^2 + y^2 = r^2$$

  - 양함수 표기 : y=f(x)

$$y = \pm\sqrt{(r^2 - x^2)}$$



- 원의 방정식의 미분

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

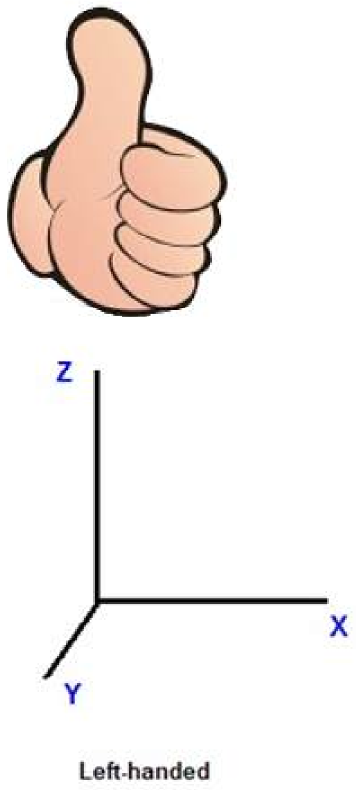
$x = -r \quad y' = +\infty$

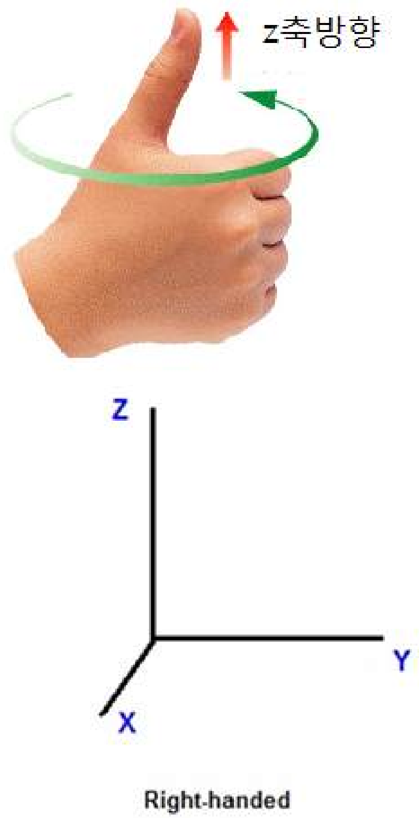
$x = 0 \quad y' = 0$

$x = +r \quad y' = -\infty$

4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표

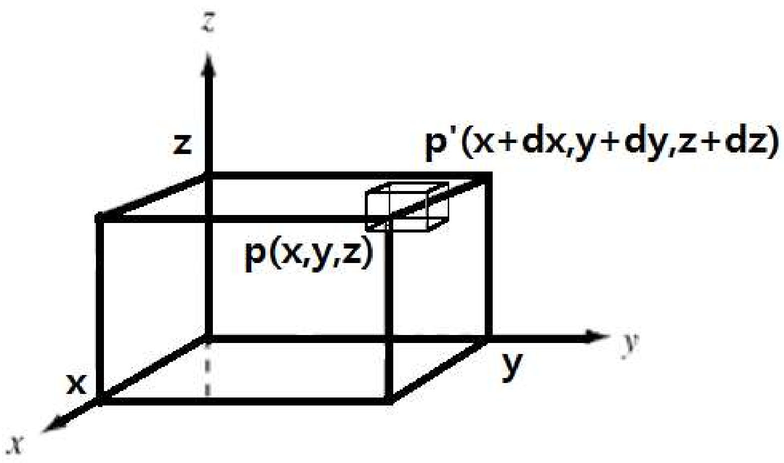
- 좌표계의 종류

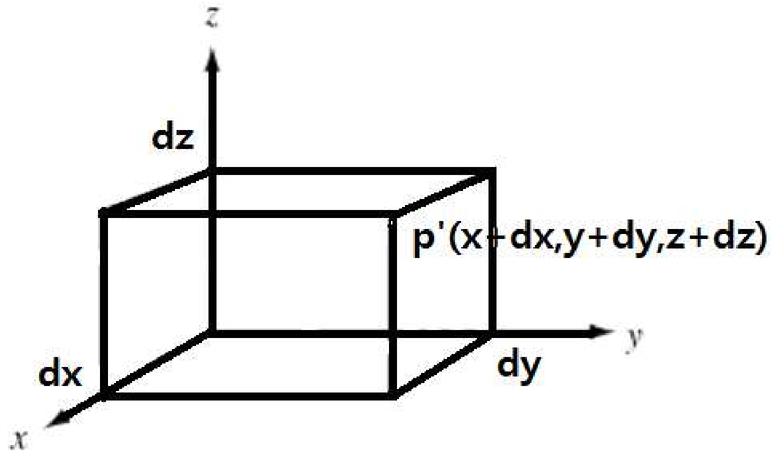




- 일반적으로 우수좌표계를 적용
- 우수좌표계를 구성하도록 축의 순서를 부여 (x, y, z)

4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표





- 데카르트좌표계를 구성하는 축의 성분 : (x, y, z)
- 미소 증분($\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$)에 의한 면적

  $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\quad \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\quad \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

- 미소 증분에 의한 체적 : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

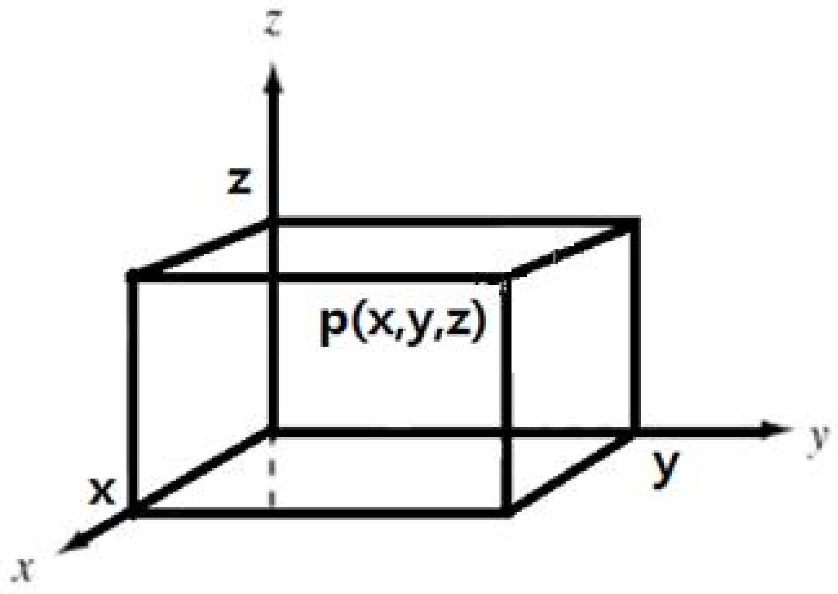
4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표

- (0,0,0)와 (x,y,z)로 구성되는 육면체의 표면적

$$2(xy + yz + zx)$$

- (0,0,0)와 (x,y,z)로 구성되는 육면체의 체적 : xyz

$$\int_0^z \int_0^y \int_0^x dxdydz = xyz$$

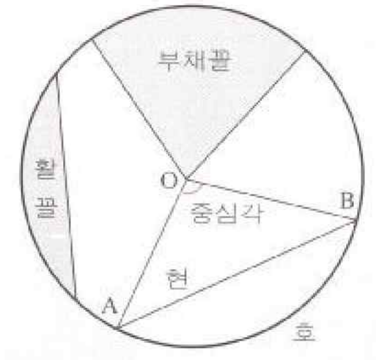


한국전기연구원

4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표

- 원의 정의

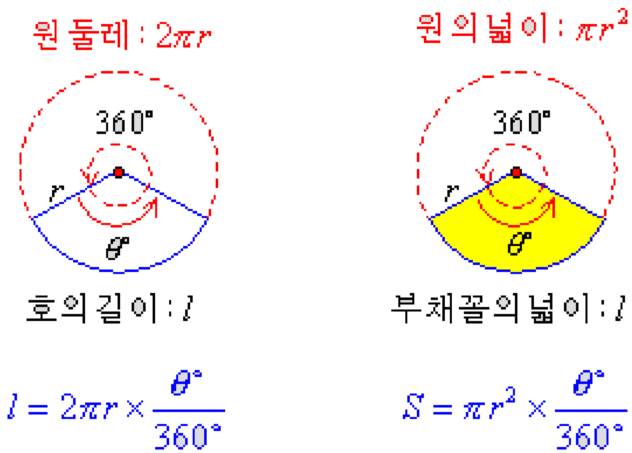
  – 주어진 한점에서 동일한 거리만큼 떨어져 있는 무한히 많은 점들의 집합



- 호의 길이

  – 호도법을 적용하면

길이 $l = r\theta$ 면적 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$



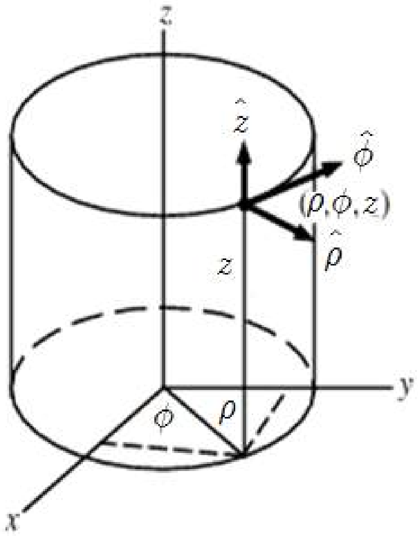
- 원둘레의 길이 $2\pi r$의 면적 πr^2유도

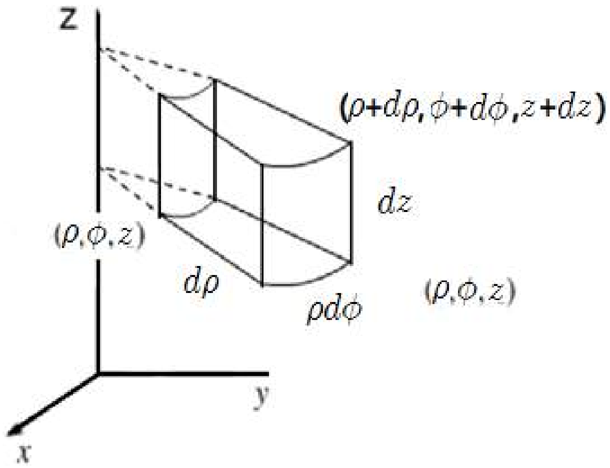
참조 : http://bemath.co.kr/

참조 : https://youtu.be/TKM11Dfmi0o

한국전기연구원

4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표





- 원통좌표계를 구성하는 축의 성분 : $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{z})$ $\quad$ $\mathbf{0 \leq \boldsymbol{\phi} < 2\boldsymbol{\pi}}$
- 미소 증분$(\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{d\phi}, \mathbf{dz})$에 의한 면적
  - 각도로 주어지는 축의 성분 $\boldsymbol{\phi}$ 를 길이 성분 $\boldsymbol{\rho d\phi}$로 변환

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\ \boldsymbol{\rho d\phi}, \qquad \boldsymbol{\rho d\phi}\ \mathbf{dz}, \qquad \mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\ \mathbf{dz}$$

- 미소 증분에 의한 체적 : $\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\ \boldsymbol{\rho d\phi}\ \mathbf{dz}$

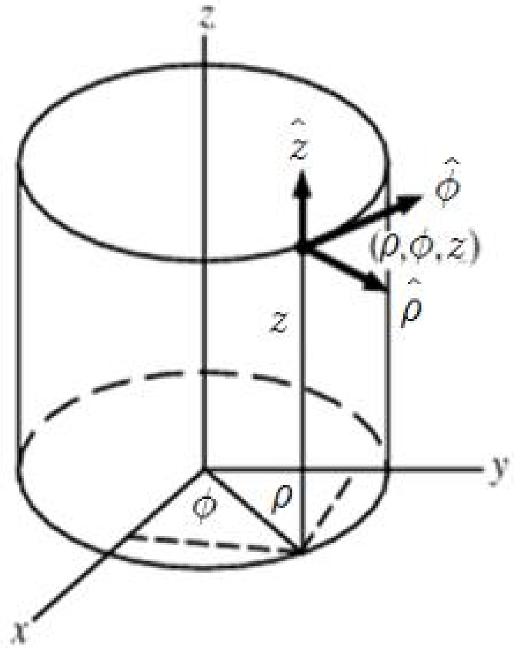
4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표

- (0,0,0)와 $(\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{z})$로 구성되는 원통의 표면적

$$\mathbf{2\pi}\boldsymbol{\rho}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{\pi\rho z}$$

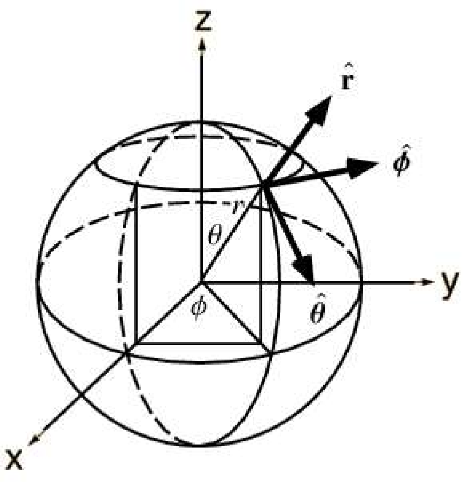
- (0,0,0)와 $(\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{z})$로 구성되는 원통의 체적

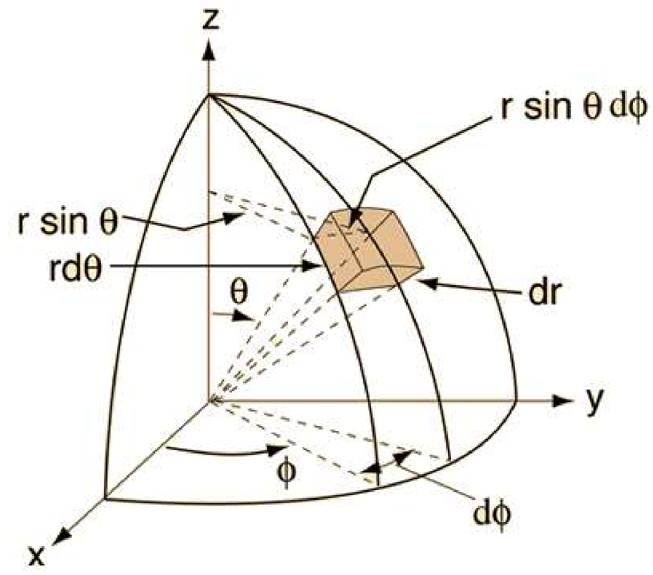
$$\int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \rho\, d\rho\, d\phi\, dz = \frac{1}{2}\rho^2\ 2\pi\ z = \pi\rho^2 z$$



한국전기연구원

4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표





- 구좌표계를 구성하는 축의 성분 : ($\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}$)

$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le \phi < 2\pi$$

- 미소 증분($\mathbf{d}r$, $\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$)에 의한 면적

  - 각도로 주어지는 축의 성분 $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\phi}$ 를 길이 성분 $\mathbf{rd}\,\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{rsin}\;\; \boldsymbol{\theta}\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$ 로 변환

$$\mathbf{d}r\ \mathbf{rd}\,\boldsymbol{\theta}, \qquad \mathbf{rd}\,\boldsymbol{\theta}\ \mathbf{rsin}\;\; \boldsymbol{\theta}\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}, \qquad \mathbf{rsin}\;\; \boldsymbol{\theta}\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}\ \mathbf{d}r$$

- 미소 증분에 의한 체적 : $\mathbf{d}r\ \mathbf{rd}\boldsymbol{\theta}\ \mathbf{rsin}\;\; \boldsymbol{\theta}\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} = r^2 sin\;\; \boldsymbol{\theta} drd\,\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\phi}$

4. 3차원 데카르트좌표, 원통좌표, 구좌표

- (0,0,0)와 (r, π, 2π)로 구성되는 구의 표면적

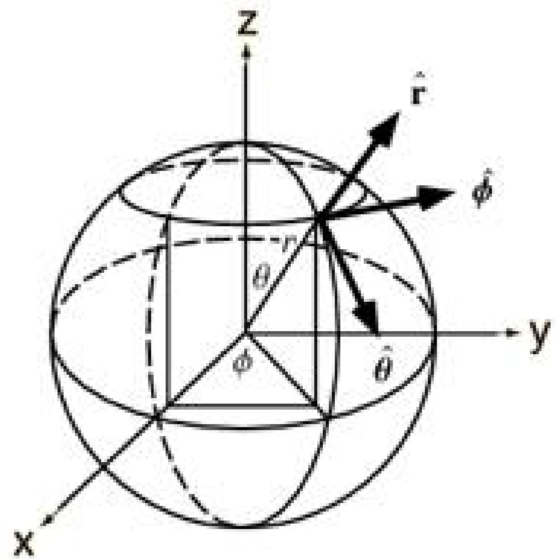
  표면에서는 r의 값이 고정값이므로 적분영역 밖으로 이동

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = r^2\,(-)\cos\theta|_0^{\pi}\, 2\pi = 4\pi r^2$$

- (0,0,0)와 (r, π, 2π)로 구성되는 구의 체적

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{1}{3} r^3\,(-)\cos\theta|_0^{\pi}\, 2\pi$$

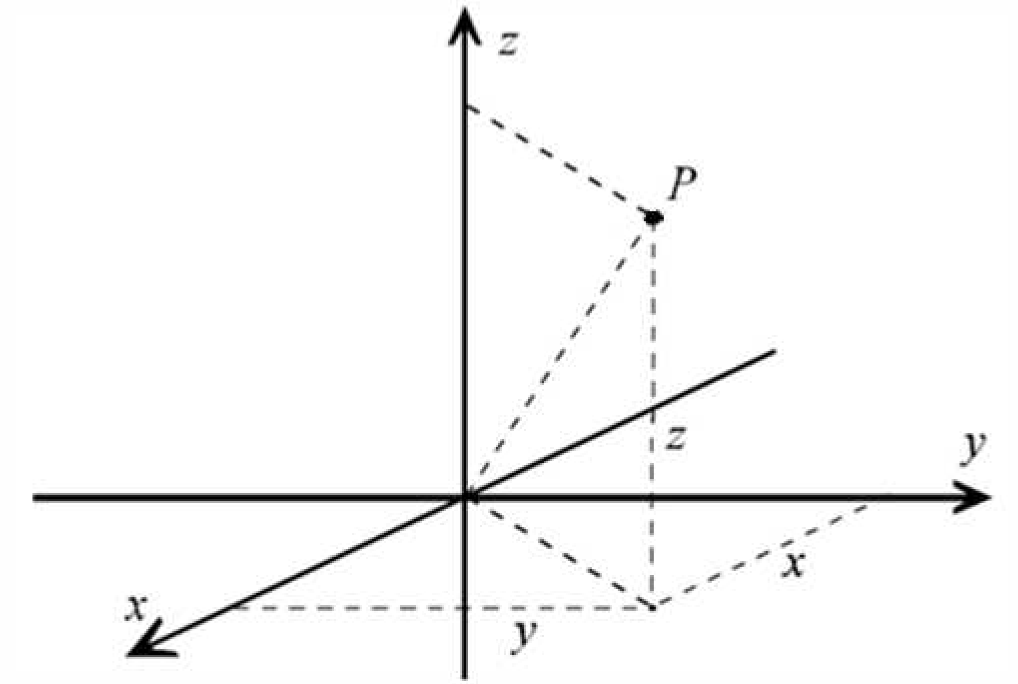
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$



한국전기연구원

5. 좌표계에서 축성분의 상호변환

➡ 직교좌표계 (x, y, z)



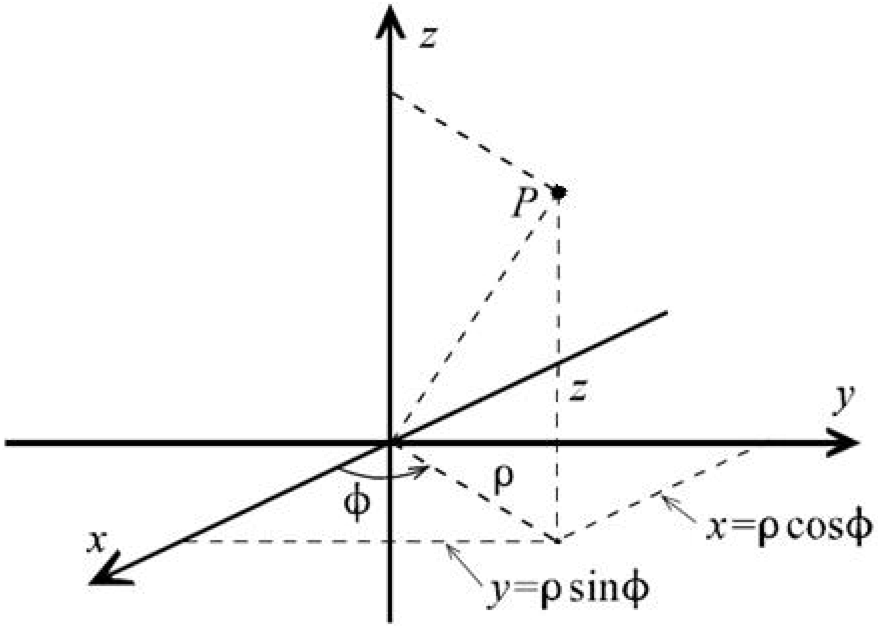
$$-\infty < x < \infty,$$

$$-\infty < y < \infty,$$

$$-\infty < z < \infty$$

5. 좌표계에서 축성분의 상호변환

➡ 원통좌표계 (ρ, ϕ, z)



$$0 \leqq \rho < \infty,$$

$$0 \leqq \phi < 2\pi,$$

$$-\infty < z < \infty$$

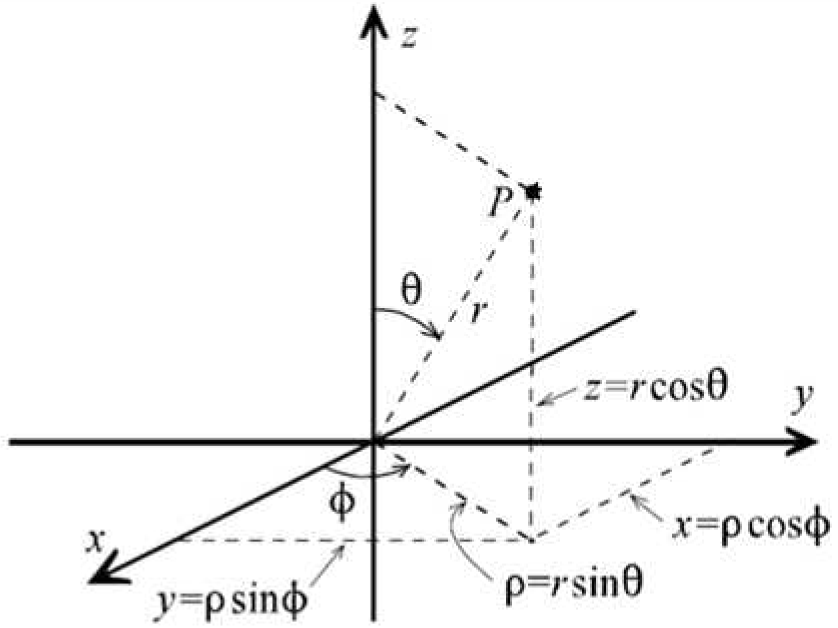
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = \rho\cos\phi$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = \rho\sin\phi$$

$$z = z \qquad z = z$$

5. 좌표계에서 축성분의 상호변환

➡ 구좌표계 (r, θ, ϕ)



$$0 \leqq r < \infty,$$

$$0 \leqq \theta \leqq \pi,$$

$$0 \leqq \phi < 2\pi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \qquad y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$\phi = \arctan(y/x) \qquad z = r\cos\theta$$

5. 좌표계에서 축성분의 상호변환

좌표계	데카르트 (x, y, z)	원통 (ρ, ϕ, z)	구 (r, θ, ϕ)
데카르트	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = \rho\ \cos\phi$ $y = \rho\ \sin\phi$ $z = z$	$x = r\sin\theta\ \cos\phi$ $y = r\sin\theta\ \sin\phi$ $z = r\cos\theta$
원통	$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ $\phi = \arctan(y/x)$ $z = z$	$\rho = \rho$ $\phi = \phi$ $z = z$	$\rho = r\sin\theta$ $\phi = \phi$ $z = r\cos\theta$
구	$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ $\theta = \arccos(z/r)$ $\phi = \arctan(y/x)$	$r = \sqrt{(\rho^2 + z^2)}$ $\theta = \arctan(\rho/z)$ $\phi = \phi$	$r = r$ $\theta = \theta$ $\phi = \phi$

6. 스칼라와 벡터

- 스칼라(Scalar)

  – 크기 성분만 가지고 방향 성분을 가지지 않는 않은 물리량을 ‘스칼라(scalar)’라고 정의

  – 질량, 온도, 길이, 에너지, 전하량 등과 같이 물체의 속성과 관련이 있는 것이 스칼라 물리량에 해당. 특히, 면적

- 벡터(vector)

  – 크기와 방향을 가지는 물리량을 ‘벡터(Vector)’라고 정의. 스칼라가 크기만을 가지고 있는 물리량인 것에 비해 벡터는 크기와 방향을 가지고 있으므로 두 가지 정보를 함께 포함하는 방법을 사용

  – 크기와 방향 두 가지 정보를 가지는 벡터를 효과적으로 표기하기 위하여 일반적으로 화살표를 사용

  – 속도, 가속도, 힘, 전기장, 자기장 등이 벡터 물리량에 해당. 특히, 면

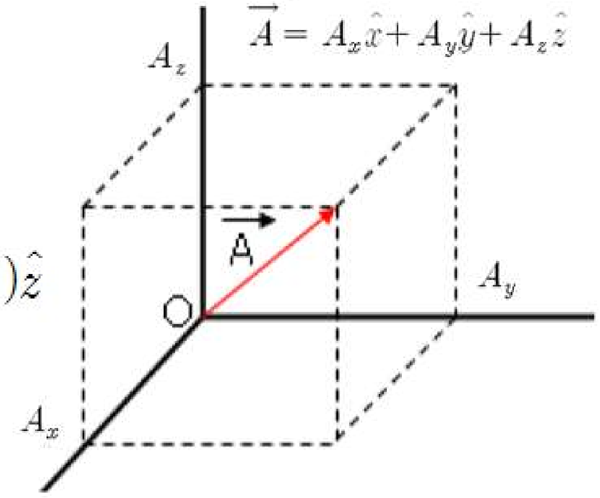
6. 스칼라와 벡터

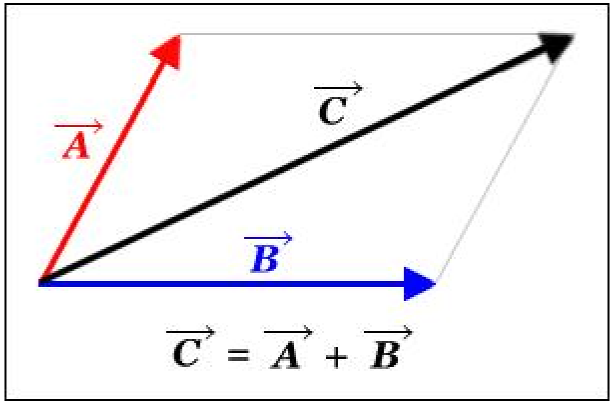
- 벡터(vector)

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z},$$

$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}.$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$$





$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$는 좌표축 방향으로의 단위벡터

벡터 $\vec{A}$의 크기는 $|\vec{A}|$으로 표기

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- 단위벡터(unit vector)
  - 크기가 1인 벡터
  - 데카르트좌표계

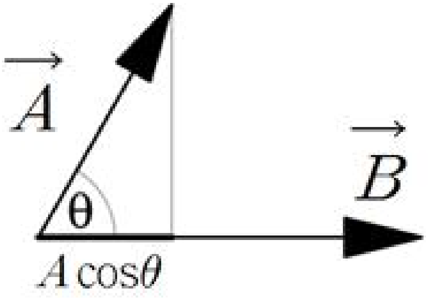
    $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

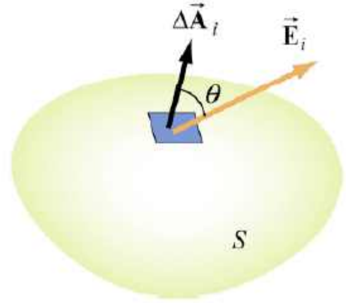
단위벡터는 방향은 벡터 $\vec{A}$의 방향을 가지면서 크기는 1이 되는 벡터.

$$\hat{A} = \frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})$$

7. 벡터의 연산 – 내적 –

3차원 공간에서 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 $\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$, $\vec{B}=B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}$으로 주어졌을 때





$$\Delta\Phi_i=\vec{E}_i\cdot\Delta\vec{A}_i=E_i\Delta A_i\cos\theta$$

두 벡터에 대한 내적 계산은 다음 식과 같이 정의한다.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$

벡터에 대한 내적의 결과를 정리하면 다음과 같다.

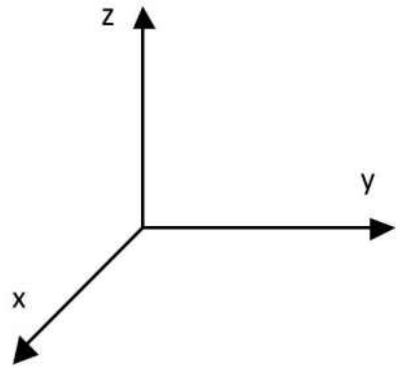
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}=\;&A_x\hat{x}\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\\&+A_y\hat{y}\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\\&+A_z\hat{z}\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\end{aligned}$$

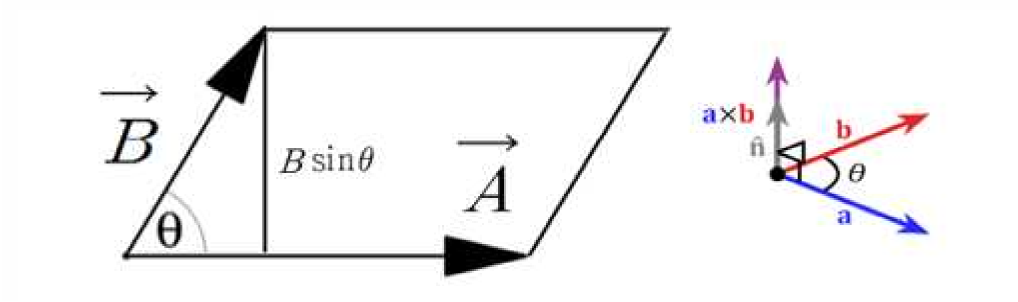
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y}=0$$
$$\hat{y}\cdot\hat{y}=1$$
$$\hat{y}\cdot\hat{z}=0$$
$$\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$
$$\hat{z}\cdot\hat{x}=0$$



7. 벡터의 연산 – 외적 –

3차원 공간에 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 $\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$, $\vec{B}=B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}$으로 주어졌을 때 두 벡터로 구성되는 2차원 평면에 두 벡터를 그리면 다음과 같다.



2차원 공간에 표현된 두 벡터에 대한 외적 계산은 다음 식으로 정의한다.

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta\ \hat{n}$$

벡터에 대한 외적을 정리하면 다음과 같다.

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}=\ & A_x\hat{x}\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\\ &+A_y\hat{y}\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\\ &+A_z\hat{z}\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}$$

$$\hat{x}\times\hat{x}=0$$
$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$$
$$\hat{y}\times\hat{y}=0$$
$$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$$
$$\hat{z}\times\hat{z}=0$$
$$\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

7. 벡터의 연산 – 내적과 외적의 의미 –

두 벡터에 대한 내적 계산결과

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

벡터 $\vec{A}$는 벡터 $\vec{B}$방향으로 얼마의 스칼라 물리량을 가지는가를 계산하여 벡터 $\vec{B}$의 스칼라 크기와 곱하는 것을 의미. 벡터의 내적에 의하여 계산된 결과는 스칼라 값으로 주어짐

두 벡터에 대한 외적 계산결과

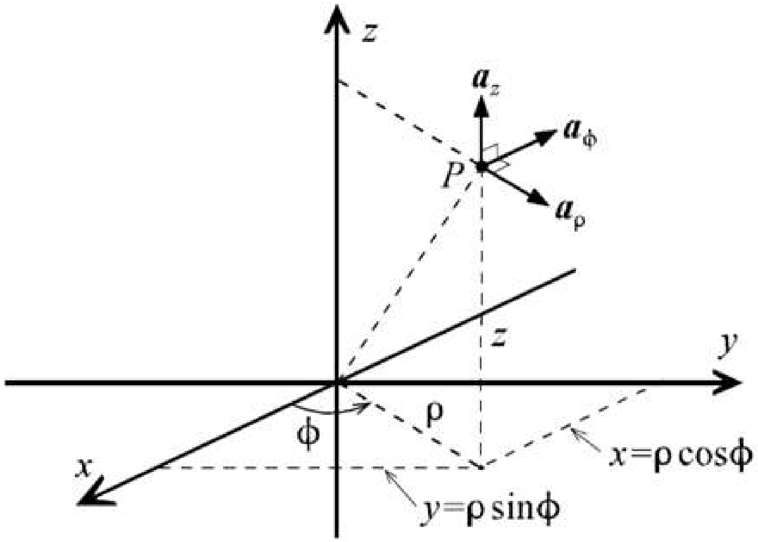
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

벡터 $\vec{A}$와 벡터 $\vec{B}$의 면적(평행사변형)에 해당하는 크기(스칼라)를 가지면서 방향은 두 벡터로 구성되는 평형사변형의 면에 수직하는 법선방향의 단위벡터 $\hat{n}$을 방향벡터로 가지는 새로운 벡터를 구성하는 것을 의미.

- 외적의 경우, 벡터의 순서가 바뀌면 방향이 반대가 되는 것에 주의

8. 좌표계에서 축성분의 내적 계산

➡ 원통좌표계 (ρ, ϕ, z)



$0 \leqq \rho < \infty,$

$0 \leqq \phi < 2\pi,$

$-\infty < z < \infty$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ $x = \rho\cos\phi$

$\phi = \arctan(\frac{y}{x})$ $\quad$ $y = \rho\sin\phi$

$z = z$ $\quad$ $z = z$

$$\hat{x} \cdot \hat{\rho} = \hat{x} \cdot (\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) = \cos\phi$$

$$\hat{y} \cdot \hat{\rho} = \hat{y} \cdot (\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) = \sin\phi$$

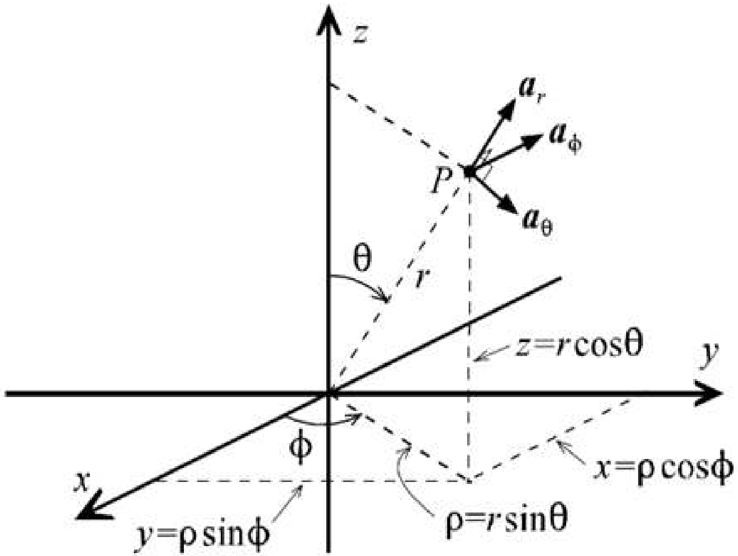
$$\hat{x} \cdot \hat{\phi} = \hat{x} \cdot (-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) = -\sin\phi$$

$$\hat{y} \cdot \hat{\phi} = \hat{y} \cdot (-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\phi\hat{y}) = \cos\phi$$

● 원통좌표계에서는 **3**축 단위벡터 중에서 **z** 방향만 일정

8. 좌표계에서 축성분의 내적 계산

➡ 구좌표계 (r, θ, ϕ)



$0 \leqq r < \infty,$

$0 \leqq \theta \leqq \pi,$

$0 \leqq \phi < 2\pi$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \qquad y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$\phi = \arctan(y/x) \qquad z = r\cos\theta$$

$$\hat{x} \cdot \hat{r} = \sin\theta\cos\phi \qquad \hat{y} \cdot \hat{r} = \sin\theta\sin\phi \qquad \hat{z} \cdot \hat{r} = \cos\theta$$

$$\hat{x} \cdot \hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi \qquad \hat{y} \cdot \hat{\theta} = \cos\theta\sin\phi \qquad \hat{z} \cdot \hat{\theta} = -\sin\theta$$

$$\hat{x} \cdot \hat{\phi} = -\sin\phi \qquad \hat{y} \cdot \hat{\phi} = \cos\phi\sin\phi \qquad \hat{z} \cdot \hat{\phi} = 0$$

● 구좌표계에서는 3축 단위벡터의 방향이 모든 지점에서 서로 다름.