

유클리드의 평면의 성질과 삼각형의 오심

제주대학교 과학영재교육원
초등수학과정 사사반 **김 우 진**

차 례 1

- ▶ 다각형
- ▶ 내각선
- ▶ 다각형의 내각
- ▶ 다각형의 외각
- ▶ 정다각형
- ▶ 유클리드 ‘원론’ 의 정다각형
- ▶ 작도 문제의 예

유클리드 평면의 성질

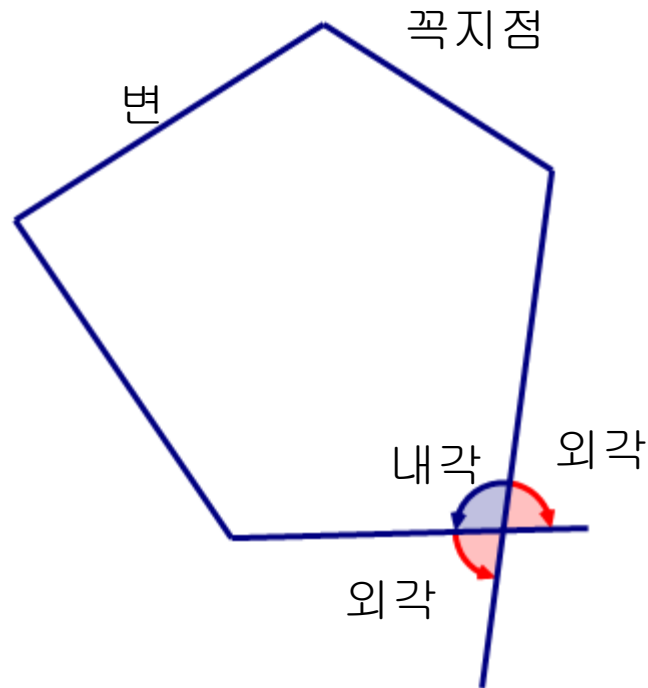
다각형

▶ 정의 :

세 개 이상의 선분으로 둘러싸인 평면도형.
그러므로 원은 곡선으로 둘러싸여 있으므로 다각형이 아니다.

- 변 : 다각형을 이루는 각 선분.
- 꼭지점 : 다각형을 이루는 선분의 끝점.
- 내각 : 다각형에서 이웃하는 두 변으로 이루어진 각.

- 외각 : 다각형의 각 꼭지점에서 한 변과 그 변에 이웃하는 변의 연장선이 이룬 각
 <참고> 다각형에서 한 내각에 대한 외각은 2개이지만 서로 맞꼭지각으로 각의 크기가 같으므로 하나만 생각한다.



▶ 다각형의 종류

1. 변의 수에 따라(삼각형, 사각형, 오각형 ..)

삼각형: 세 변으로 둘러싸인 도형.

변의 길이에 따라 - 정삼각형, 이등변삼각형

각의 크기에 따라 - 예각, 직각, 둔각삼각형

사각형 : 변의 길이와 각의 크기 , 두 변의 평행여부에 따라 사다리꼴, 평행사변형,마름모 등으로 구분된다.

2. 모양에 따라

다각형은 볼록 다각형과 오목다각형으로 구분하기도 한다. 볼록 다각형은 바깥쪽으로 볼록하게 나온 다각형이고, 오목다각형은 안쪽으로 오목한 다각형이다.

▶ 대각선 :

다각형에서 이웃하지 않는 두 꼭지점을 이은 선분.

그러므로 이웃하지 않는 꼭지점이 없는 삼각형은 대각선을 그을 수 없다.

사각형은 2개, 오각형은 3개의 대각선을 그을 수 있는 것이다.

꼭지점의 개수가 n 개인 n 각형의 대각선 개수 = $\frac{n(n-3)}{2}$

▶ 대각선의 활용

대각선의 수를 활용하여 리그전의 경기 수나 악수하는 횟수를 구할 수 있다.

▶ 리그전 경기 횟수 = 선분의 개수 = $\frac{\text{사람 수} \times (\text{사람 수} - 1)}{2}$

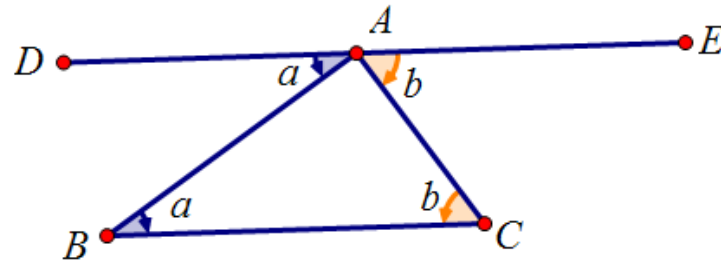
다각형 내각 크기의 합

내각 : 다각형에서 이웃하는 두 변으로 이루어진 각.

1. 삼각형

삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이다.

< 증명 >



선분 DE는 선분 BC와 평행이므로

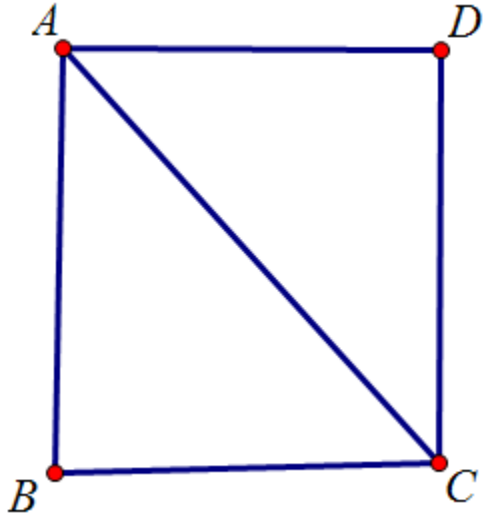
$\angle DAB = \angle ABC$ (엇각)

$\angle EAC = \angle ACB$ (엇각)

그러므로 삼각형의 세 내각의 합은 180도임을 알 수 있다.

2. 사각형

사각형의 내각의 크기의 합은 360도이다.



□ ABCD는 $\triangle ACD$ 와 $\triangle ABC$ 로 나눌 수 있다.

∴ □ ABCD의 내각의 합 = $180 + 180 = 360$

다각형의 기본인 삼각형의 내각의 합이 180도이므로
이를 이용하면 다른 다각형의 내각의 크기 합도 구할 수
있다.

$$\text{다각형의 내각의 합} = 180 \times (n - 2)$$

다각형 외각 크기의 합

외각 : 다각형의 각 꼭지점에서 한 변과 그 변에 이웃하는 변의 연장선이 이룬 각

다각형의 한 내각과 그에 대한 외각의 크기 합은 180도이다.

<증명>

$$\begin{aligned} & (\text{내각과 외각의 크기의 합} \times n\text{각형}) - (n\text{각형의 내각의 크기}) \\ &= (180 \times n) - 180 \times (n - 2) \\ &= 180n - 180n + 360 = 360 \end{aligned}$$

그러므로 모든 다각형 외각의 크기 합은 360도이다.

정다각형

▶ 정의 :

변의 길이가 모두 같고, 각의 크기도 모두 같은 다각형.

▶ 성질 :

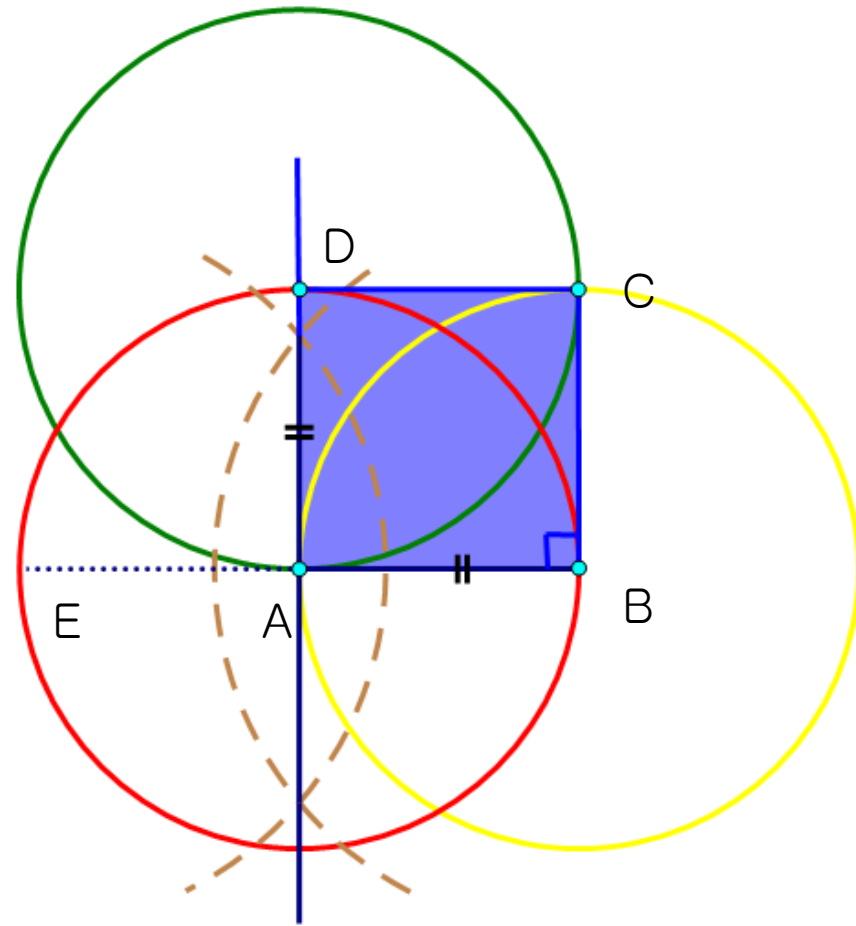
정다각형의 한 각이 내각의 크기 $= \frac{180(n-2)}{n}$.
정다각형의 한 외각의 크기 $= \frac{360}{n}$.

▶ 종류 :

정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정팔각형, 정십각형, 정십이각형 등은 작도가 가능하다.

- 위의 정다각형들의 작도는 각의 이등분, 수직이등분, 수선그리기 작도법을 이용하면 그릴 수 있다.

<정다각형 작도의 예>



1. 선분 AB의 길이를 컴퍼스로 재서 똑같은 길이의 선분 AE를 만든다.
2. 점 E와 점 B를 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 선분 AB보다 큰 반원을 그리고, 이 두 반원의 교점을 연결하여 선분 EB에 수직 이등분선을 긋는다.
3. 점 A를 원의 중심, 선분 AB를 반지름으로 하는 **빨간색 원**을 그린다. (빨간색 원)
4. 3번의 빨간색 원과 수선의 교점을 점 D라 한다.
5. 점 D를 중심으로, 선분 AD를 반지름으로 하는 **초록색 원**을 그린다. (초록색 원)
6. 점 B를 중심으로, 선분 AB를 반지름으로 하는 **노란색 원**을 그린다. (노란색 원)
7. 위 4번, 5번의 초록색 원과 노란색 원의 교점을 C라 하여, 선분 DC, 선분 BC를 그으면 **네 변의 길이가 같고 네 각의 크기가 같은 정사각형 ABCD**가 된다.

유클리드 <원론>의 정다각형

▶ 작도는 눈금 없는 자와 컴퍼스만 가지고 정다각형 등을 그리는 것으로 이와 관련된 내용은 유클리드 <원론> 제4권에 나와 있다.

200여 년 전까지는 유클리드 <원론>의 정삼각형, 정오각형, 정육각형, 정십오각형 외에 작도할 수 있는 다른 도형은 찾지 못했다.

참고> 눈금 없는 자와 컴퍼스는 '유클리드 도구'라고 불리기도 한다.

▶ 1796년 **가우스**는 **눈금 없는 자**와 **컴퍼스**만을 가지고 **정17각형**을 작도 할 수 있다는 것을 알아냈다.

가우스 이후에도 정257각형, 정65537각형 등 정다각형을 작도할 수 있는 방법이 수학자들에 의해 밝혀지고 있다.

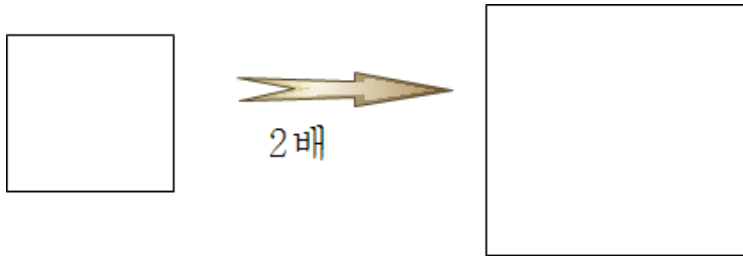
▶ **아르키메데스**는 고대 그리스의 수학자로 원에 접하는 정다각형을 이용하여 원주율 **π** 의 값이

$\frac{223}{71}$ 과 $\frac{22}{7}$ 사이에 있다는 것을 알아 냈다고 한다. 그리고 원에 접한 다각형의 꼭지점을 두 배씩 늘려 정 96각형을 그렸다고도 한다.

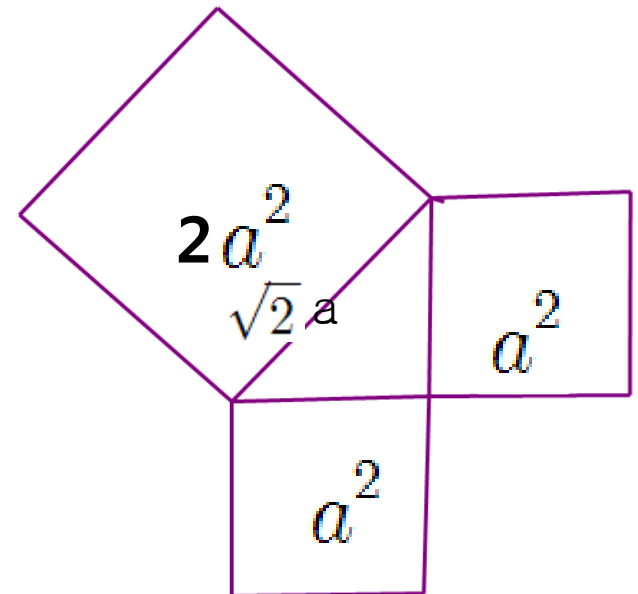
▶ 이 원주율은 현재 사용하는 원주율과 소수점 이하 둘째 자리까지 일치한다고 한다.

〈작도응용〉

문제 1. 정사각형이 주어질 때 면적이 2배인 정사각형을 그려라. 작도방법을 상술하시오.



1. 한 변의 길이를 a 라 하면 이 정사각형의 넓이는 a^2 이 된다. 면적이 2배인 정사각형은 그 넓이가 $2a^2$ 이 되어야 한다.
2. 한변의 길이가 a 인 정사각형에서 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$ 가 된다.
그러므로 이 대각선의 길이를 한 변으로 하는 정사각형을 그리면 그 넓이는 $2a^2$ 이 되므로 그 넓이는 원래 주어진 사각형의 넓이의 2배인 정사각형이 되는 것이다.

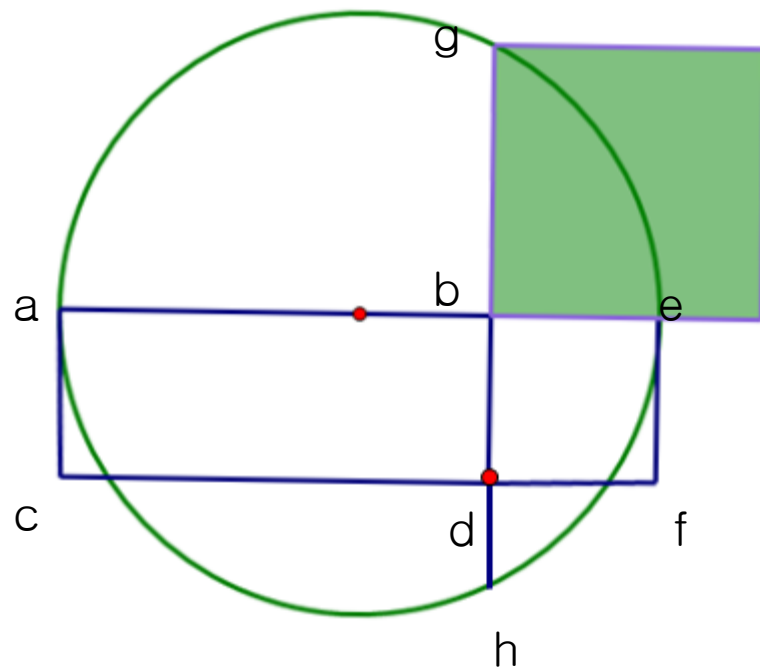


문제 2. 직사각형과 면적이 같은 정사각형 작도법

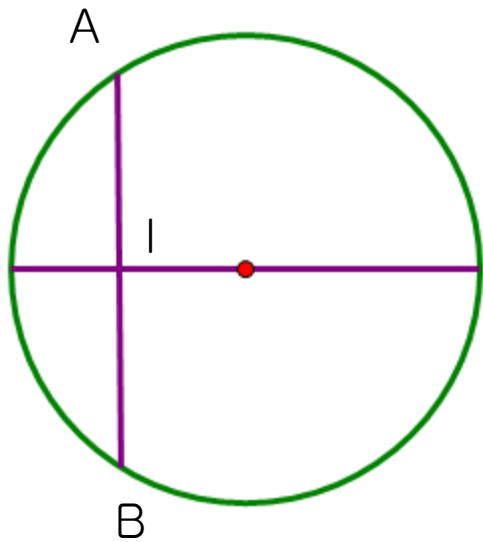


과 같은 정사각형을 작도하여라.

1. 직사각형 바로 옆에 길이가 선분 bd 와 같은 정사각형을 그려서, 나머지 두 꼭지점을 e, f 라 한다.
2. 선분 ae 를 지름으로 하는 원을 그린다.
(수직이등분선 작도법 이용)
3. 그 다음 점 b 를 지나는 선분 ae 에 대한 수선을 그려 원과 수선이 만나게 하고, 이 교점을 g 라 한다.
4. 변 bg 를 한 변으로 하는 정사각형을 그린다.
선분 $ab \times$ 선분 $be =$ 선분 $bg \times$ 선분 bh
(적용 원리 1, 2 응용)

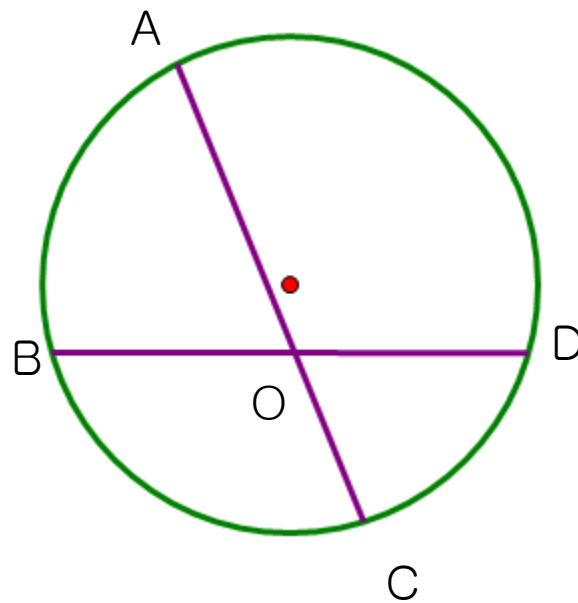


원리 1



선분 AI = 선분 BI

원리 2



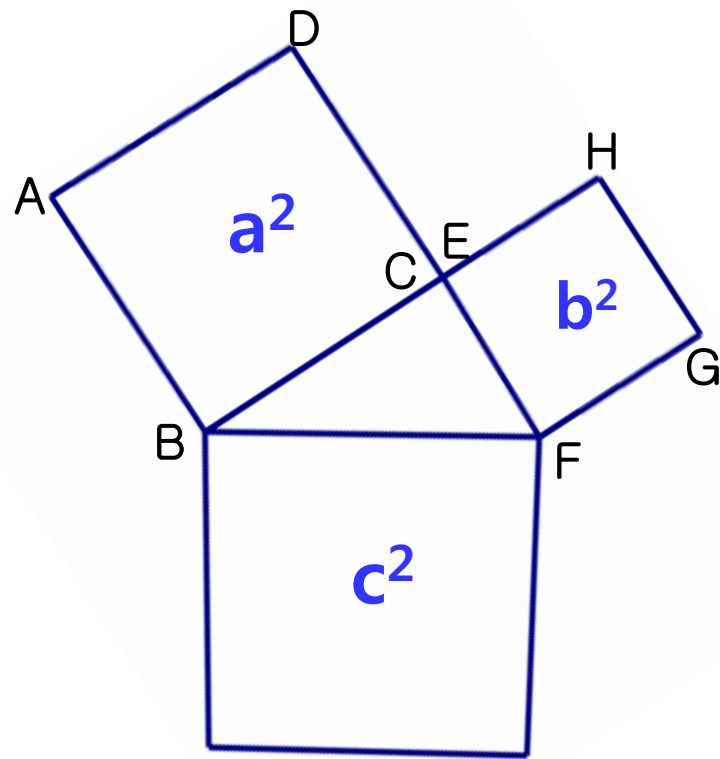
선분 AO X 선분 CO = 선분 BO X 선분 DO

문제 3. 정사각형이 두 개 주어질 때, 두 정사각형의 넓이의 합과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 그려라.

1. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD와
한 변의 길이가 b 인 정사각형 EFGH의
넓이 합은 $a^2 + b^2 = c^2$

2. 피타고라스의 정리를 증명하는 방법을 이용하면 두 사각형의 넓이의 합은 밑변이 a , 높이가 b , 빗변이 c 인 직각삼각형에서 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 모양과 같다.

3. 그러므로 두 정사각형의 넓이의 합은 직각삼각형 빗변의 길이가 c 인 정사각형의 넓이와 같다.

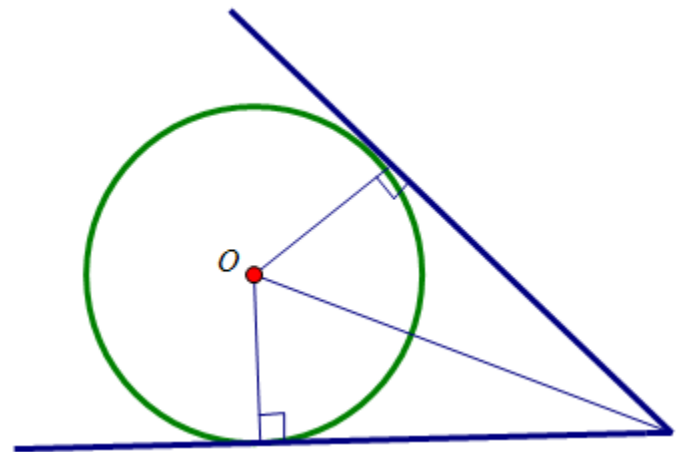
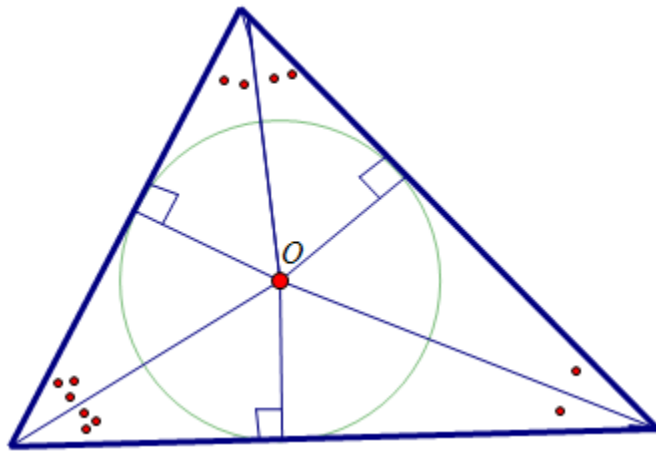


차례 2

- ▶ 내 심
- ▶ 외 심
- ▶ 무게 중심
- ▶ 수 심
- ▶ 방 심

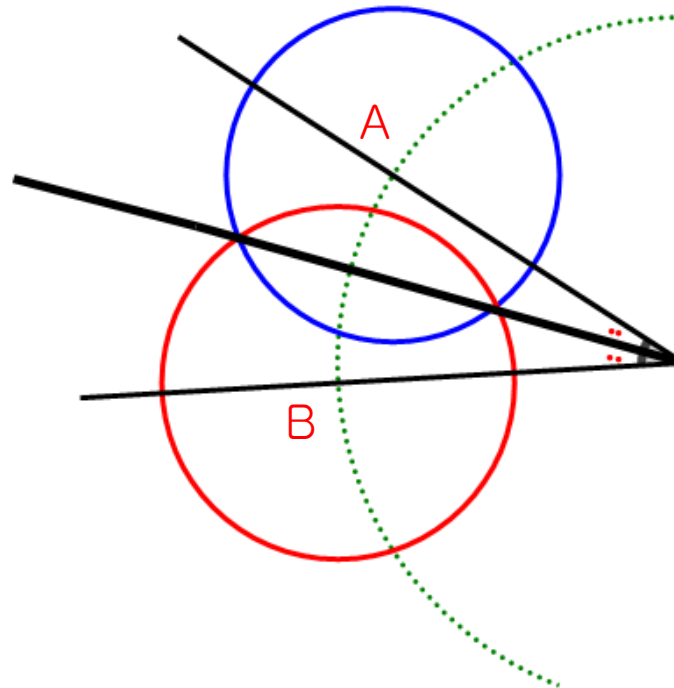
내심 I

- ▶ **정의:** 내접원의 중심. 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점.
- ▶ **성질:** 내심에서 각 변에 이르는 거리는 같다.
⇒ 이 거리는 내접원의 반지름이 된다.



〈참고〉 작도방법 -각의 이등분선 그리기

1. 이등분하려는 각의 꼭지점을 중심으로 하는 **반원**을 그린다(**초록 점선**)
2. 이 반원과 두 직선이 만나는 두 교점, **점A**, **점B**에서 이 교점을 중심으로 하는 반지름이 같은 반원(**파란 원**, **빨간 원**)을 그린다
3. 이 두 반원의 교점과 꼭지각을 연결하면, 각의 이등분선이 그려진다..



내접원에 외접하는 삼각형의 꼭지각과 중심각의 관계

$$2a + 2b + 2c = 180$$

$$2(a + b + c) = 180$$

$$a + b + c = 90 \sim \textcircled{1}$$

$\triangle BIC$ 에서

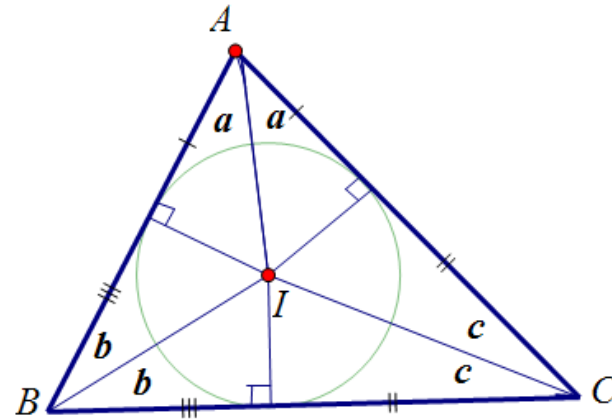
$$\angle BIC = 180 - (b + c)$$

$$= 180 - (90 - a) : \text{위의 } \textcircled{1} \text{에 의해서}$$

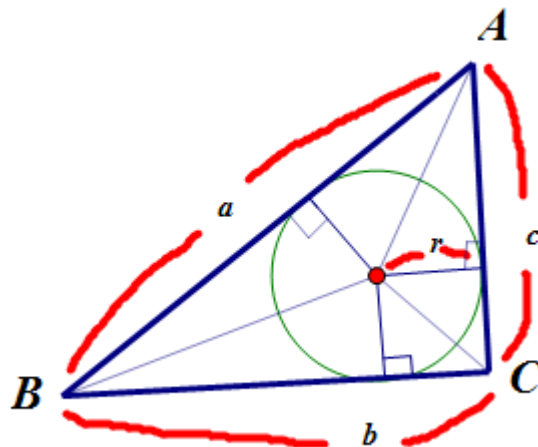
$$= 90 + a$$

$$= 90 + \frac{1}{2} \angle A$$

$$\therefore \angle BIC = 90 + \frac{1}{2} \angle A$$



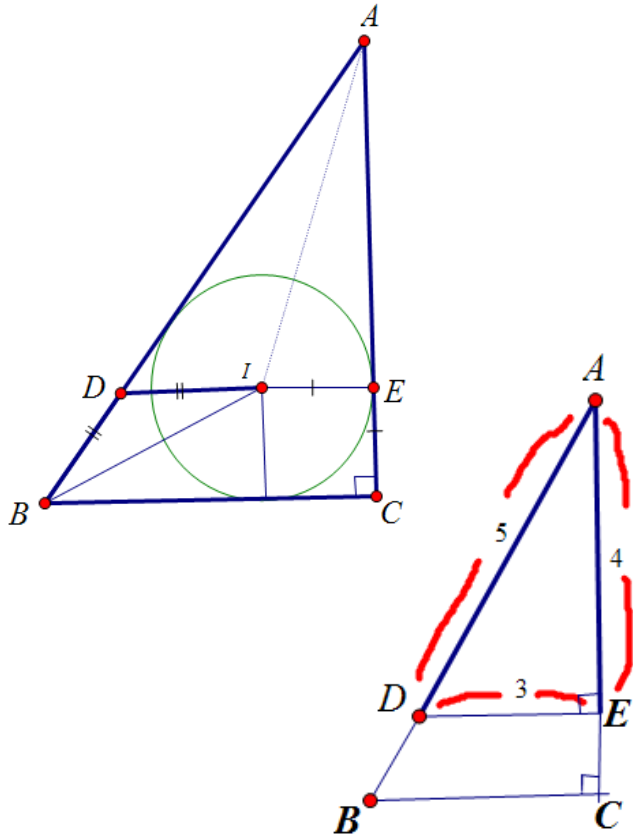
내접원에 외접하는 삼각형의 넓이



$\triangle ABC$ 의 넓이 =

$$\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

내접원에 외접하는 삼각형의 둘레 구하기



$$\overline{DB} = \overline{DI},$$

$$\overline{EC} = \overline{EI}$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DI}$$

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AE} + \overline{EI}$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{AC} = \triangle ADE \text{의 둘레}$$

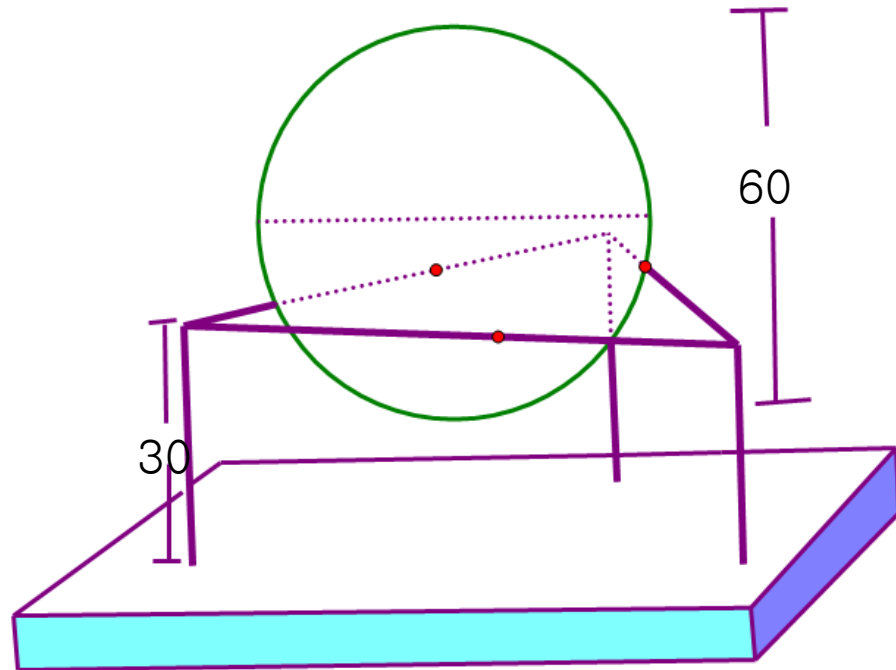
$$\overline{AB} + \overline{AC} = 5 + 4 + 3 = 12$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{AC} = 12$$

〈내심 응용〉

지구의가 테이블 위의 삼각대 받침대 위에 놓여있다. 지구의가 손상되지 않도록 삼각대 각 변에 고무 밴드를 붙이려고 한다. 어디에 고무 밴드를 붙이면 되겠는가?

(삼각대 높이는 30cm , 각은 각각 30, 60, 90도이고 가장 짧은 변의 길이는 60cm이다) 또한 지구의의 반지름이 30cm 이면 지구의의 높이는 테이블로부터 얼마인가?



내접원의 반지름 길이를 구하면

$$2a + 2b + 2c = 180 + 60\sqrt{3}$$

$$2(a + b + c) = 180 + 60\sqrt{3}$$

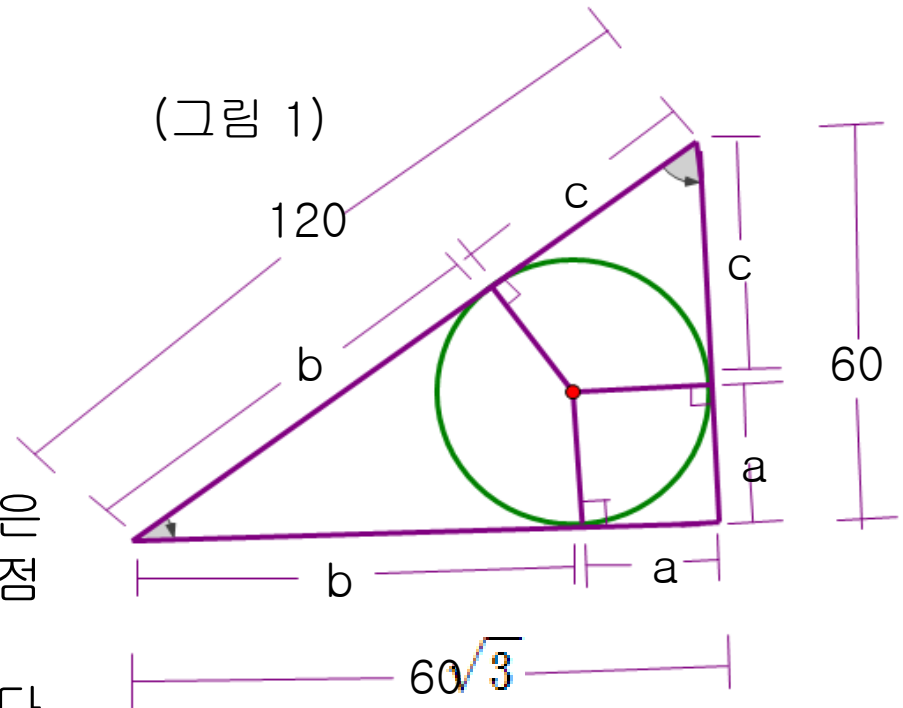
$$a + b + c = 90 + 30\sqrt{3}$$

$$b + c = 120 \text{ (그림 1 참고)}$$

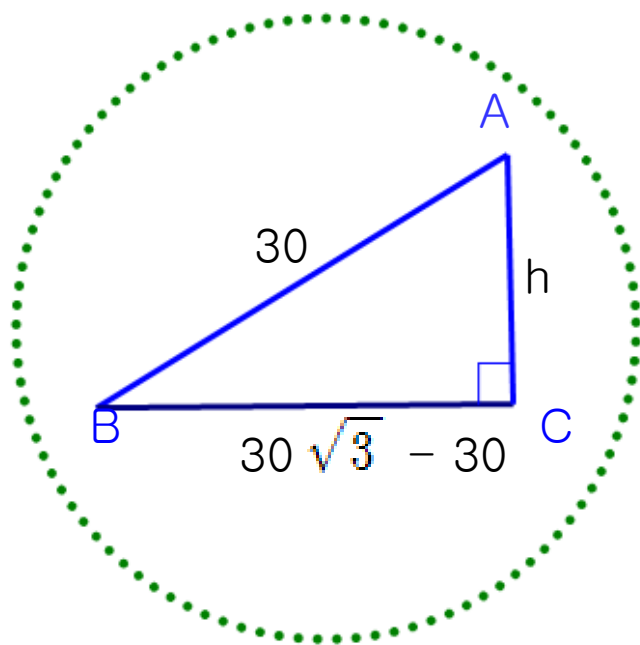
$$a = 30\sqrt{3} - 30$$

지구의가 삼각대와 만나는 점은
내접원과 삼각형이 접하는 접점
(그림 1)과 같다. 그러므로 이
접점에 고무밴드를 붙이면 된다.

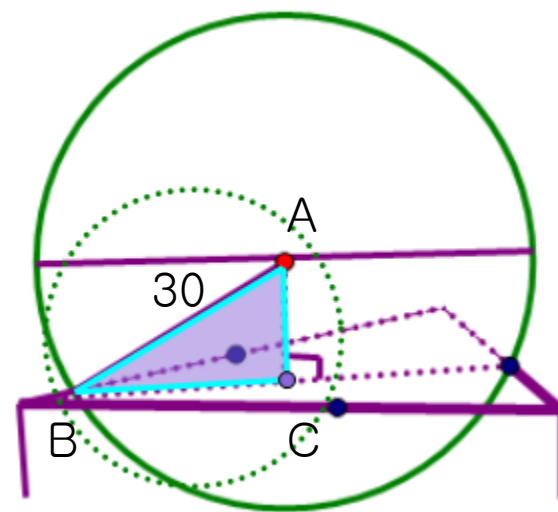
그러므로 고무밴드의 위치는 꼭지점에서는
 $90 - 30\sqrt{3}$ (c의 길이), 밑변의 직각
부분에서는 각각 $30\sqrt{3} - 30$ (a의 길이)
만큼 떨어진 곳에 붙이면 된다.



테이블로부터 지구의 높이



(그림 2)



$\triangle ABC$ 에서

선분 AB = 지구의 반지름

선분 BC = 삼각대 안의 내접원의 반지름

선분 AC = 지구의 중심에서 삼각대까지의 거리

$$\begin{aligned}
 h^2 &= 30^2 - (30\sqrt{3} - 30)^2 \\
 &= 900 - (2700 - 1800\sqrt{3} + 900) \\
 &= 900 - (3600 - 1800\sqrt{3}) \\
 &= 900 - 3600 + 1800\sqrt{3} = -2700 + 1800\sqrt{3} \\
 &= 900(2\sqrt{3} - 3) \\
 h &= \sqrt{900(2\sqrt{3} - 3)} = 30\sqrt{2\sqrt{3} - 3}
 \end{aligned}$$

테이블에서 지구의까지 높이는

지구의의 높이 + 삼각대의 높이 - 삼각대 안으로 들어간 지구의의 높이

▶ 지구의 높이 60

▶ 삼각대 높이 30

▶ 삼각대 안에 들어간 지구의의 높이 = $30 - 30(\sqrt{2\sqrt{3}-3})$

그러므로

$$\begin{aligned} 60 + 30 - (30 - 30\sqrt{2\sqrt{3}-3}) &= 60 + 30 - 30 + 30\sqrt{2\sqrt{3}-3} \\ &= 60 + 30\sqrt{2\sqrt{3}-3} \end{aligned}$$

외심 0

▶ 정의

‘외접원의 중심’으로 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점

〈참고〉 작도방법- 한 선분(변)의 수직이등분선 그리기

1. 수직 이등분하고자 하는 선분의 양 끝점에서 이 선분의 $1/2$ 보다 길게 반지름을 잡고 각각 반원을 그린다.
2. 이 두 반원의 교점을 이르면 선분의 수직이등분선이 된다.

▶ 성 질 :

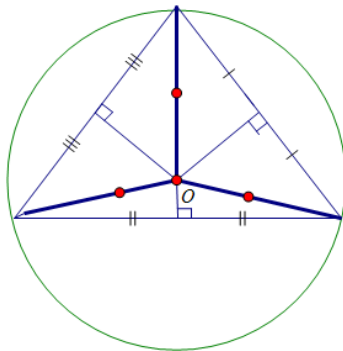
1. 외심에서 각 꼭지점에 이르는 거리는 같다.

그러므로 외심에서 삼각형의 각 꼭지점을 이어보면
각각 두 밑각의 크기가 같은 3개의 이등변 삼각형이
됨을 알 수 있다.

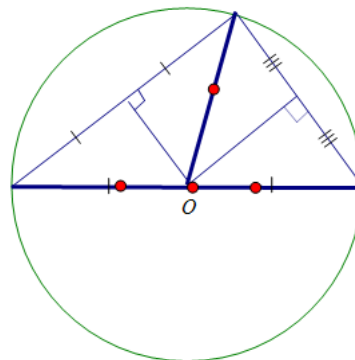
또, 이 거리는 ‘외접원의 반지름’ 이 된다.

2. 삼각형의 모양에 따라 아래 그림과 같이 외심의 위치는 달라진다.

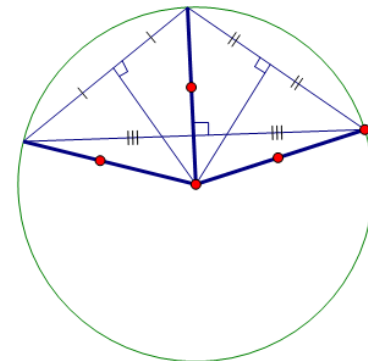
- ▶ 예각삼각형 : 삼각형의 내부
- ▶ 직각삼각형 : 삼각형의 빗변 위
- ▶ 둔각삼각형 : 삼각형의 외부



예각삼각형



직각삼각형



둔각삼각형

3. 외심에서 그 중심각의 크기는 현까지의 원주각의 크기의 2배가 된다.

<증명>

$$2a + 2b + 2c = 180$$

$$2(a + b + c) = 180$$

$$a + b + c = 90 \sim \textcircled{1}$$

$\triangle BOC$ 에서

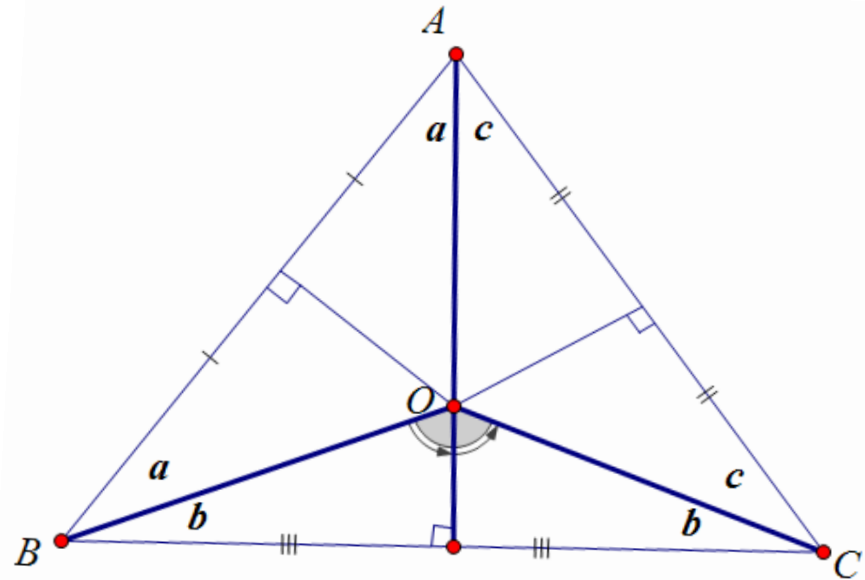
$$\angle BOC = 180 - 2b$$

$$= 180 - 2(90 - a - c) : \text{위의 } \textcircled{1} \text{에 의하여}$$

$$= 180 - 180 + 2a + 2c = 2(a + c)$$

$$\therefore \angle BOC = 2(a + c)$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A$$



무 게 중 심 G

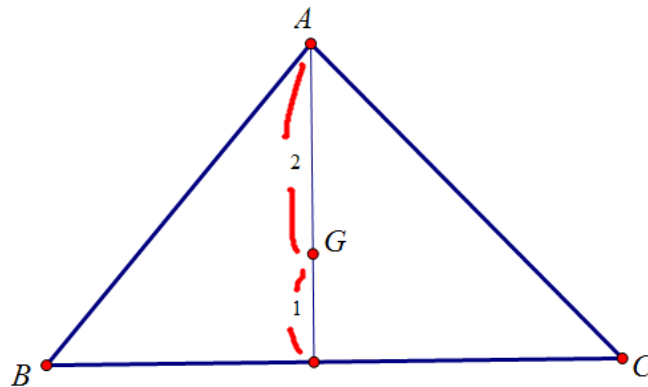
▶ 정의

삼각형의 각 꼭지점에서 마주보는 변 (대변)의 중점을 이었을 때 생기는 세 중선의 교점

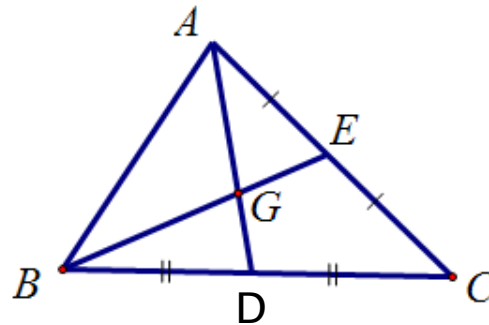
▶ 성질

1. 무게중심은 꼭지점과 중점 사이를 꼭지점에서부터 2 : 1로 나누는 점이다.

- 무게중심은 꼭지점과 중점 사이를 2:1로 내분한다.

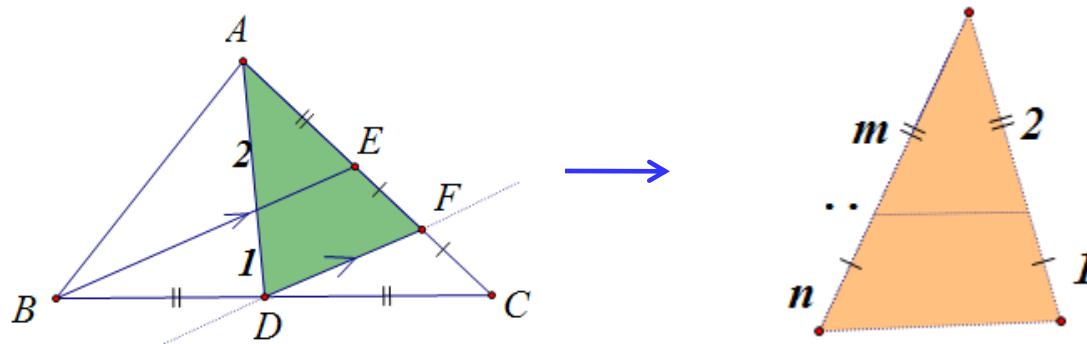


(증명)



$\triangle ABC$ 에서 $\overline{BE}$ 와 평행한 점 D 를 지나는 직선 DF 를 그린다

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AG} : \overline{GD} = m : n$ 이라 하면



$$m : n = (1 + 1) : 1 = 2 : 1$$

$$m : n = 2 : 1$$

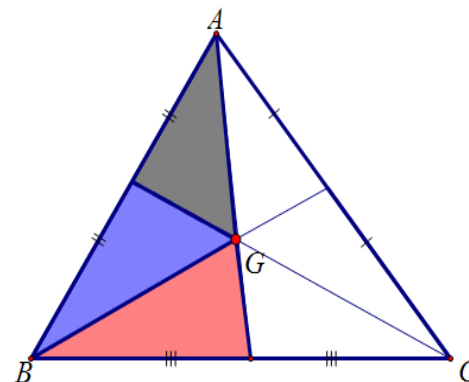
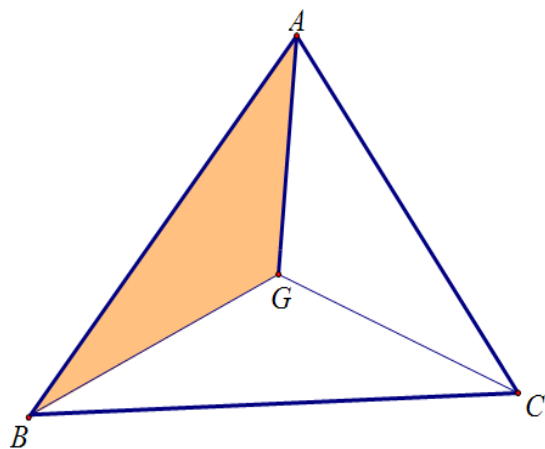
$$\therefore m : n = 2 : 1$$

2. 무게중심은 삼각형의 균형선의 교점으로 무게중심으로 삼각형의 균형을 잡을 수 있다.
3. 2개의 중선만으로도 무게중심을 찾을 수 있다.

4. 무게중심과 삼각형의 넓이 관계

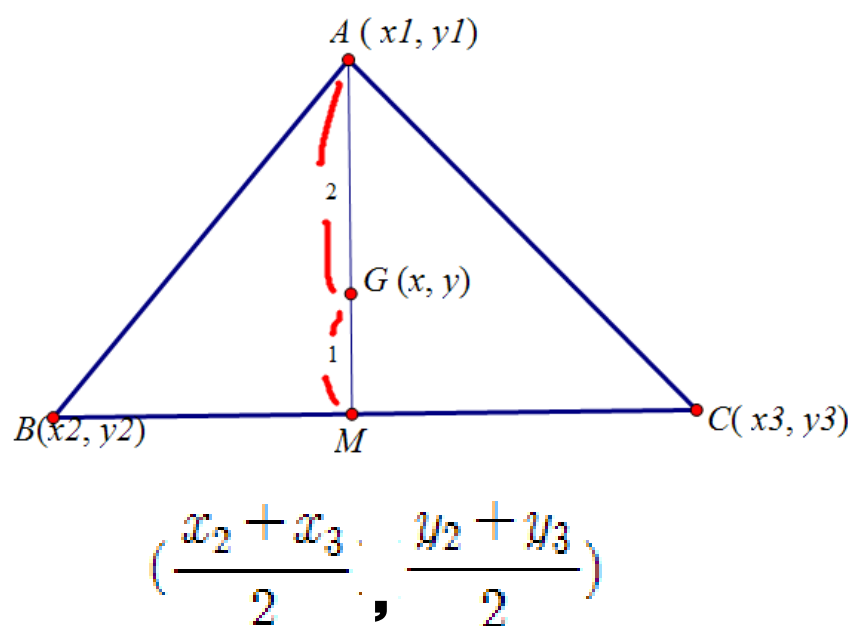
- $\triangle ABC$ 안의 무게중심을 중심으로 3등분된 세 삼각형의 넓이는 서로 같다.

- $\triangle ABC$ 안에 무게중심 G 를 중심으로 6등분된 삼각형의 넓이는 서로 같다.



5. 삼각형의 세 꼭지점을 이용한 무게중심의 좌표

무게중심 $G(x, y)$ 가 선분 AM 을 $2 : 1$ 로 내분하므로



$$x = \frac{2 \times (\frac{x_2 + x_3}{2}) + x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2 \times (\frac{y_2 + y_3}{2}) + y_1}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

그러므로 이 그림에서 무게중심 G 의 좌표는 $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$ 이다

수심

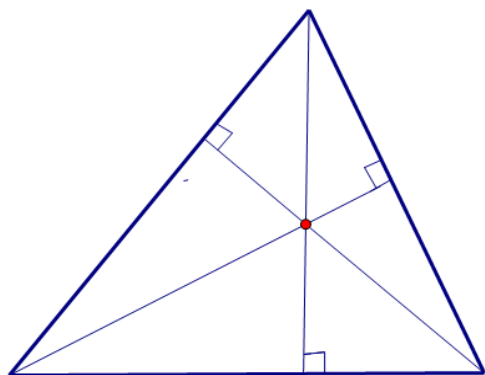
▶ 정의

삼각형의 꼭지점에서 마주보는 대변에 수선을 그었을 때 세 수선의 교점.

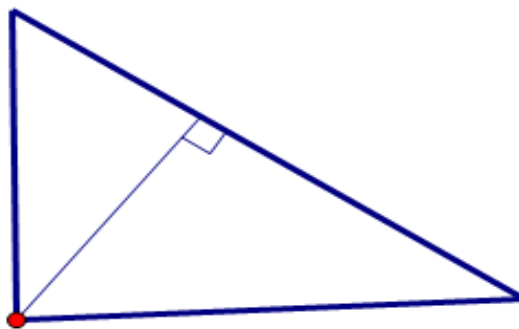
▶ 성질

1. 삼각형의 모양에 따라 삼각형의 수심의 위치(●)도 다르다.

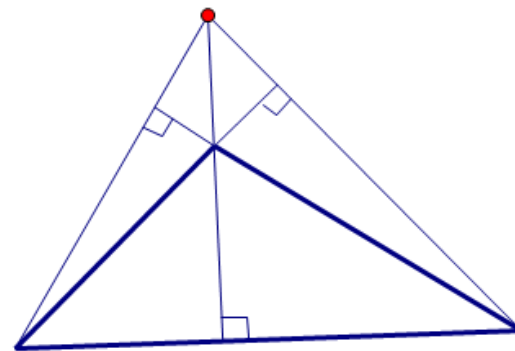
- 예각삼각형 : 삼각형의 내부
- 직각삼각형 : 삼각형의 직각꼭지점
- 둔각삼각형 : 삼각형의 외부



예각삼각형



직각삼각형



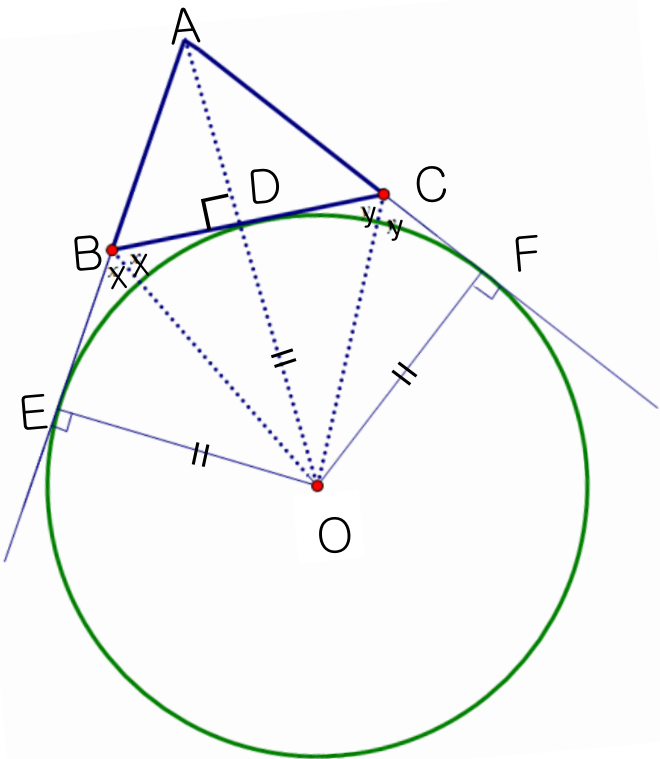
둔각삼각형

2. 외심,내심과는 달리 원의 중심은 아니다.

방심

▶ 정의

‘방접원의 중심’으로 삼각형의 한 내각의 이등분선과 나머지 두 외각의 이등분선의 교점



▶ 성질

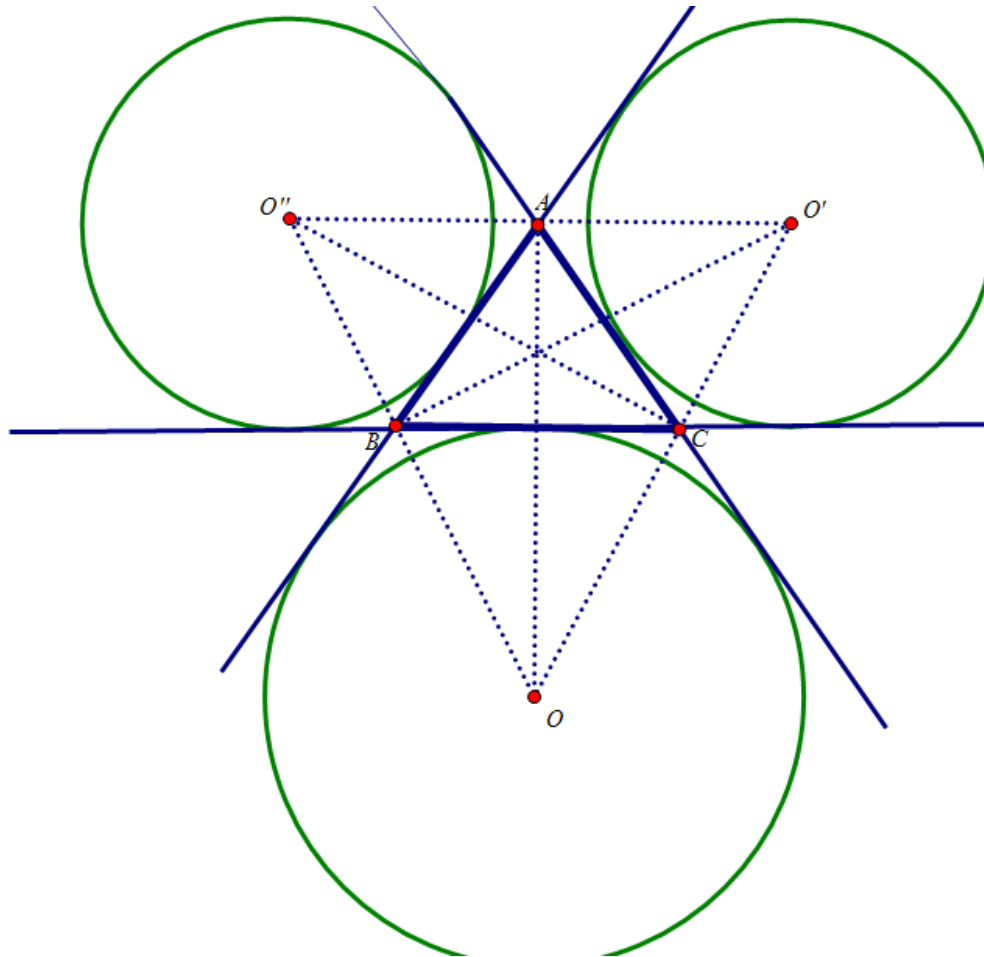
1. 삼각형의 둘레와 방접원과의 관계

$$\overline{BE} = \overline{BD}$$

$\overline{CD} = \overline{CF}$ ($\because \triangle BEO \equiv \triangle BDO$ RHS 합동)

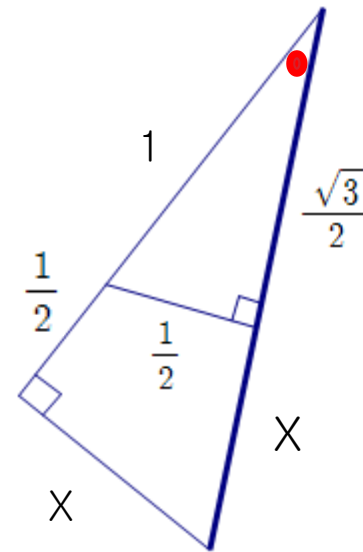
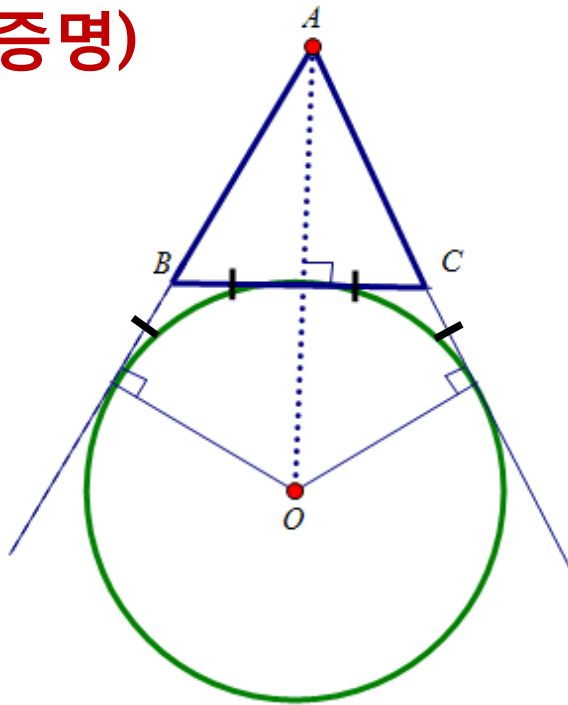
$$\therefore \triangle ABC \text{의 둘레} = \overline{AE} + \overline{AF}$$

2. 한 삼각형에는 3개의 방접원이 있으므로 3개의 방심을 구할 수 있다.



3. 두 직각삼각형은 AA닻음이므로 닻음을 이용하여 방접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

(증명)



$$X : \frac{1}{2} \text{ (밑변)} = 1 + \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (높이)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} X = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} X = \frac{3}{4} \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- ▶ 그러므로 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 방접원의 반지름은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 임을 알 수 있다