

제2장 행렬과 가우스 소거법

2.1 행렬과 일차연립방정식

• 행렬(Matrix)

- 수나 식 등을 직사각형의 형태로 괄호 안에 배열한 것

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3.14 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1-i & i \\ 1+i & 1 & 1+i \\ i & 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

- 행렬의 수평 배열은 행(row), 행렬의 수직 배열은 열(column)
 - ⇒ 행렬의 크기는 행의 수와 열의 수로 표시
 - ⇒ $(m \times n)$ 행렬은 행의 수가 m , 열의 수가 n 인 행렬
 - ⇒ 행렬내의 수 또는 식은 성분(element), a_{ij}

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} (m \times n) \text{행렬}, \quad \begin{cases} i: \text{행} \\ j: \text{열} \end{cases}$$

- 행렬 A 의 임의의 i 번째 행은 $[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$ 으로 $(1 \times n)$ 행렬

- 행렬 A 의 임의의 j 번째 열은 $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ 으로 $(m \times 1)$ 행렬

• 벡터(Vector)

- 한 개의 행 또는 열로 이루어진 행렬, $(m \times 1)$ 행렬 또는 $(1 \times n)$ 행렬

$$A_r = [a_{1j}] = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}], \quad (1 \times n) \text{행렬} : \text{행벡터(row vector)}$$

$$A_c = [a_{i1}] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad (m \times 1) \text{행렬} : \text{열벡터(column vector)}$$

【예제 2.1】 다음 일차연립방정식의 해를 소거법에 의해 계산

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 2 \cdots ① \\ 4x - 3y + 2z &= 7 \cdots ② \\ x + 3z &= 10 \cdots ③ \end{aligned} \quad (2.1)$$

- 연립방정식 (2.1)에서 식 ①과 식 ③, 식 ②와 식 ①을 서로 교환

$$\begin{aligned} x + 3z &= 10 \cdots ③ \\ 3x + 2y - z &= 2 \cdots ① \\ 4x - 3y + 2z &= 7 \cdots ② \end{aligned} \quad (2.2)$$

- 식 ③에 -3 를 곱하여 식 ①에 더하고, 식 ③에 -4 를 곱하여 식 ②에 합산

$$\Rightarrow \text{식 ④에 } \frac{1}{2} \text{을 승산}$$

$$\begin{aligned} x + 3z &= 10 \cdots ③ \\ 2y - 10z &= -28 \cdots ④ \\ -3y - 10z &= -33 \cdots ⑤ \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} x + 3z &= 10 \cdots ③ \\ y - 5z &= -14 \cdots ⑥ \\ -3y - 10z &= -33 \cdots ④ \end{aligned} \quad (2.4)$$

- 식 ⑥에 3 을 곱하여 식 ④에 합산, 식 ⑦에 $-\frac{1}{25}$ 을 승산

$$\begin{aligned} x + 3z &= 10 \cdots ③ \\ y - 5z &= -14 \cdots ⑥ \\ -25z &= -75 \cdots ⑦ \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} x + 3z &= 10 \cdots ③ \\ y - 5z &= -14 \cdots ⑥ \\ z &= 3 \cdots ⑧ \end{aligned} \quad (2.6)$$

- $z=3$ 을 식 ⑥에 대입하여 y 를 구하고, 식 ③에 대입하여 x 를 계산

$$\Rightarrow \text{일차연립방정식의 해는 } x=1, y=1, z=3$$

$$\begin{aligned} x &= -3z + 10 \\ y &= 5z - 14 \\ z &= 3 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} x &= -3z + 10 \\ &= -3 \times 3 + 10 = 1, \end{aligned} \quad \begin{aligned} y &= 5z - 14 \\ &= 5 \times 3 - 14 = 1 \end{aligned}$$

■

• 연립방정식의 행렬 표시

- 예제 2.1에서 알 수 있듯이 연립방정식에 대해 3가지 기본연산을 수행할 경우
 $\Rightarrow$ 계수와 상수만 변하고 변수 x, y, z 는 위치나 값이 불변
 $\Rightarrow$ 변수를 생략하고 계수와 상수만으로 연립방정식 해석 가능

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow AX=B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : \text{계수 행렬 (coefficient matrix)}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : \text{해 벡터}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} : \text{상수 행렬}$$

- 연립방정식을 계수행렬, 해벡터, 상수행렬을 이용하여 $AX=B$ 의 형태로 표시
 $\Rightarrow$ 행렬방정식(matrix equation)

• 확대행렬(Augmented Matrix)

- 계수행렬 A 의 가장 우측 열 다음에 상수벡터 B 를 첨가하여 만든 행렬

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] : \text{확대 행렬 (첨가행렬)}$$

【예제 2.2】 예제 2.1의 일차연립방정식의 해를 확대행렬을 이용하여 계산

$$\begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ 4x-3y+2z=7 \\ x+3z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & : & 2 \\ 4 & -3 & 2 & : & 7 \\ 1 & 0 & 3 & : & 10 \end{bmatrix}$$

- 연립방정식을 풀기 위해서 적용된 기본연산을 확대행렬의 각 행에 대해 수행

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & : & 2 \\ 4 & -3 & 2 & : & 7 \\ 1 & 0 & 3 & : & 10 \end{bmatrix}$	① ② ③	(2.1)	① $\Leftrightarrow$ ③ ② $\Leftrightarrow$ ①
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 10 \\ 2 & 2 & -1 & : & 2 \\ 4 & -3 & 2 & : & 7 \end{bmatrix}$	③ ① ②	(2.2)	③ $\times (-3) + ①$ ③ $\times (-4) + ②$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 10 \\ 0 & 2 & -10 & : & -28 \\ 0 & -3 & -10 & : & -33 \end{bmatrix}$	③ ④ ⑤	(2.3)	⑤ $\times \left(\frac{1}{2}\right)$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 10 \\ 0 & 1 & -5 & : & -14 \\ 0 & -3 & -10 & : & -33 \end{bmatrix}$	③ ⑥ ④	(2.4)	⑥ $\times (3) + ④$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 10 \\ 0 & 1 & -5 & : & -14 \\ 0 & 0 & -25 & : & -75 \end{bmatrix}$	③ ⑥ ⑦	(2.5)	⑦ $\times \left(-\frac{1}{25}\right)$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 10 \\ 0 & 1 & -5 & : & -14 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	③ ⑥ ⑧	(2.6)	

- 변형된 최종 확대행렬을 다시 연립방정식으로 변환하고 후진대입법 적용
 $\Rightarrow$ 연립방정식의 해를 계산

$$\begin{aligned} x+3z=10 & \quad x=-3z+10 \\ y-5z=-14 & \quad y=5z-14 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= -3z+10 \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= -3 \times 3 + 10 = 1, \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} y &= 5z-14 \\ &= 5 \times 3 - 14 = 1 \end{aligned}$$



2.2 기본행연산

• 행렬에 대한 기본행연산

- 연립방정식의 기본연산에 대응하여 행렬에 대하여 적용되는 3가지의 연산
 - ⇒ 임의의 i 행과 j 행을 서로 교환하는 연산 : $R_{i,j}$
 - ⇒ 임의의 i 행에 0이 아닌 상수 c 를 곱하는 연산 : $R_i(c)$
 - ⇒ 임의의 i 행에 상수 c 를 곱하여 j 행에 더하는 연산 : $R_{i,j}(c)$

【예제 2.4】 다음 일차연립방정식의 확대행렬에 기본행연산을 적용하여 해를 계산

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ 3x + 5y + 8z &= 24, \\ 5x + 8y + 9z &= 28 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 28 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 3 & 5 & 8 & : & 24 \\ 5 & 8 & 9 & : & 28 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 3 & 5 & 8 & : & 24 \\ 5 & 8 & 9 & : & 28 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{1,2}(-3)$ $R_{1,3}(-5)$	$\textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{2}$ $\textcircled{1} \times (-5) + \textcircled{3}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 3 & -1 & : & -12 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_2\left(\frac{1}{2}\right)$	$\textcircled{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & -1 & : & -12 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{2,3}(-3)$	$\textcircled{2} \times (-3) + \textcircled{3}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -4 & : & -12 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_3\left(-\frac{1}{4}\right)$	$\textcircled{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	① ② ③		

- 변형된 최종 확대행렬을 다시 연립방정식으로 변환하고 후진대입법 적용
 - ⇒ 연립방정식의 해를 계산

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 & x &= -y - 2z + 8 & y &= -z = -3 \\ y + z &= 0, & y &= -z & x &= -y - 2z + 8 \\ z &= 3 & z &= 3 & &= 3 - 6 + 8 = 5 \\ \therefore x &= 5, & y &= -3, & z &= 3 \end{aligned}$$



• 행동치(Row Equivalent)

- 행렬 A 에 유한 횟수의 기본행연산을 적용하여 얻은 행렬 B 가 있을 경우
 $\Rightarrow$ 행렬 A 와 B 는 행동치(row equivalent)
- 예제 2.2와 2.4에서 초기 확대행렬로부터 변환된 모든 행렬들은 서로 행동치

• 역기본행연산

- 기본행연산이 수행된 행렬을 본래의 행렬로 환원시키기 위한 연산
 $\Rightarrow$ 역기본행연산(inverse elementary row operation)

표 2.1 기본행연산과 역기본행연산의 비교

행렬 A 에 기본행연산을 적용하여 행렬 B 로 변환	행렬 B 에 역기본행연산을 적용하여 행렬 A 로 변환
A 의 i 행과 j 행을 교환	B 의 i 행과 j 행을 교환
A 의 i 행에 $c \neq 0$ 인 상수 c 배	B 의 i 행에 $c \neq 0$ 인 상수 $1/c$ 배
A 의 i 행을 c 배하여 j 행에 합산	B 의 i 행을 $-c$ 배하여 j 행에 합산

【예제 2.5】 예제 2.4의 행렬 A 에 다음과 같이 기본행연산을 적용하여 행렬 B 로 변환

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_3(-4)$	$③ \times (-4)$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -4 & : & -12 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{2,3}(3)$	$② \times (3) + ③$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & -1 & : & -12 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_2(2)$	$② \times (2)$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 3 & -1 & : & -12 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{1,2}(3)$ $R_{1,3}(5)$	$① \times (3) + ②$ $① \times (5) + ③$
$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 8 \\ 3 & 5 & 8 & : & 24 \\ 5 & 8 & 9 & : & 28 \end{bmatrix}$	① ② ③		



【예제 2.6】 행렬 A 에 기본행연산을 적용한 다음, 역기본행연산을 적용

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1,2}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1(2)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1,2}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1,2}(4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 6 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ -3y &= -6 \end{aligned} \tag{2.11}$$

- 연립방정식 (2.9), (2.10), (2.11)에 일차연립방정식에 대한 기본연산 적용
 $\Rightarrow$ 연립방정식 (2.8)로 변환 가능, (2.8)~(2.11)의 해는 모두 동일
 $\Rightarrow$ 연립방정식 (2.8)~(2.11)은 동치(equivalent)



정리 2.1

두 연립방정식의 확대행렬이 행동치이면 두 연립방정식의 해는 동일

• 행제형 행렬(Row-Echelon Matrix)

- 임의의 한 행에 0이 아닌 성분이 있으면 그 행의 처음으로 0이 아닌 수는 1
 $\Rightarrow$ 선도 1(leading 1) ; 피벗(pivot)
- 두 행에서 아래 행의 선도 1은 위쪽 행의 선도 1보다 오른쪽 열에 위치
- 모든 성분이 0으로 된 행이 있으면 그 행은 행렬의 가장 아래쪽에 위치
- 행제형 행렬은 가우스행렬(Gauss matrix)이라고도 지칭
- 행제형 행렬 중에서 선도 1을 포함하는 각 열의 다른 모든 성분이 0인 행렬
 $\Rightarrow$ 소거 행제형 행렬(reduced row-echelon matrix)
 $\Rightarrow$ 기약 가우스행렬(reduced Gauss matrix)

【예제 2.7】 가우스행렬과 기약 가우스행렬의 개념을 확인하기 위한 예제

- x, y, z 가 임의의 수일 때, (2×2) 행렬과 (3×3) 행렬인 가우스행렬의 예

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (2×2) 행렬과 (3×3) 행렬중 기약 가우스행렬이 되는 경우의 예

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A, B, C 는 가우스행렬이 아니며 D 는 가우스행렬이지만 기약 가우스행렬(X)

- ⇒ 행렬 A 에서 모든 성분이 0인 행이 두 번째 행에 위치
 ⇒ 행렬 B 의 두 번째 행에서 처음으로 0이 아닌 수가 3
 ⇒ 행렬 C 에서 셋째 행의 선도 1이 둘째 행보다 왼쪽에 위치
 ⇒ 행렬 D 의 셋째 열에서 1을 제외한 다른 성분이 0이 아님

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$



2.3 가우스 소거법

• 가우스 소거법(Gauss Elimination)

- 연립방정식의 확대행렬을 가우스 행렬로 변환하여 해를 구하는 방법
 - ① 행렬방정식의 계수행렬과 상수벡터를 이용하여 확대행렬 구성
 - ② 확대행렬에 기본행연산을 수행하여 가우스 행렬로 변환
 - ③ 가우스 행렬을 연립방정식으로 변환하고 후진대입법 적용
- 가우스 행렬에서 선도 1이 속한 열에 대응하는(선도 1을 계수로 하는) 변수
 $\Rightarrow$ 선도변수(leading variable)
- 가우스 행렬에서 선도변수를 제외한 나머지 변수
 $\Rightarrow$ 자유변수(free variable)

【예제 2.8】 다음 일차방정식에서 선도변수와 자유변수 고찰

$$\begin{aligned} v + 4w - 2x + \quad + 3z &= -4 \\ x + 2y - 4z &= 3 \\ y - z &= 1 \end{aligned} \quad : \text{일차방정식}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 4 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \end{array} \right] \quad : \text{확대행렬}$$

- 확대행렬 A 는 가우스 행렬이며, v, x, y 는 선도변수, w, z 는 자유변수

• 후진대입법(Back Substitution)

- 가우스 행렬로 변환된 확대행렬을 연립방정식으로 변환하여 해를 구하는 방법
 - ① 각각의 자유변수를 임의의 매개변수로 치환
 - ② 모든 성분이 0이 아닌 행중 가장 아래 행의 위치를 i 번째로 지정
 - ③ i 번째 행을 그 행의 선도변수에 관하여 풀고, $i=1$ 이면 종료
 - ④ $i > 1$ 이면 $i-1 \rightarrow i$ 로 i 값을 치환하여 3번째 단계를 다시 수행

【예제 2.9】 예제 2.8의 연립방정식에 후진대입법 적용

- 자유변수인 w 와 z 를 각각 $w=s$, $z=t$ 와 같이 매개변수로 치환
 $\Rightarrow i=3$ 인 행을 선도변수 y 에 대해서 방정식을 정리
 $\Rightarrow y-z=1, \quad y=z+1=t+1$
- $i=3>1$, $i \leftarrow i-1=3-1=2$ 이므로 $i=2$ 인 행을 선도변수 x 에 대하여 정리
 $\Rightarrow x=-2y+4z+3=-2(t+1)+4t=2t-1$
- $i=2>1$, $i \leftarrow i-1=2-1=1$ 이므로 $i=1$ 인 행을 선도변수 v 에 대하여 정리
 $\Rightarrow v=-4w+2x-3z-4=-4s+2(2t+1)-3t-4=-4s+t-2$
- $i=1$ 이므로 후진대입법이 종료되고, 연립방정식은 무수히 많은 해
 $\Rightarrow v=-4s+t-2, \quad w=s, \quad x=2t-1, \quad y=t+1, \quad z=t$

【예제 2.10】 다음 연립방정식의 해를 후진대입법을 적용하여 계산

$$\begin{aligned} 2x+5y-z &= 9 \\ x+2y &= 4, \\ 3y+z &= 3 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & : & 9 \\ 1 & 2 & 0 & : & 4 \\ 0 & 3 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & : & 9 \\ 1 & 2 & 0 & : & 4 \\ 0 & 3 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{1,2}$	$\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 4 \\ 2 & 5 & -1 & : & 9 \\ 0 & 3 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{1,2}(-2)$	$\textcircled{1} \times (-2) + \textcircled{2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 3 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{2,3}(-3)$	$\textcircled{2} \times (-3) + \textcircled{3}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 4 & : & 0 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_3\left(\frac{1}{4}\right)$	$\textcircled{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$	① ② ③	$x+2y=4$ $y-z=1$ $z=0$	

- 자유변수는 없으며 $i=3$ 인 행을 선도변수 z 에 대하여 정리
 $\Rightarrow i=2$ 인 행을 선도변수 y 에 대하여 정리,
 $\Rightarrow i=1$ 인 행을 선도변수 x 에 대하여 정리
 $\Rightarrow z=0, \quad y=z+1=1, \quad x=-2y+4=-2+4=2$

2.4 가우스-조단 소거법

• 가우스-조단 소거법(Gauss-Jordan Elimination)

- 확대행렬을 기약 가우스 행렬로 변환하여 일차연립방정식의 해를 계산

- ① 행렬방정식의 계수행렬과 상수행렬을 이용하여 확대행렬 구성
- ② 확대행렬에 기본행연산을 수행하여 기약 가우스 행렬로 변환
- ③ 기약 가우스 행렬의 자유변수를 각각 임의의 매개변수로 치환
- ④ 기약 가우스 행렬의 0이 아닌 각각의 행을 선도변수에 대해 정리

【예제 2.11】 다음 연립방정식의 해를 가우스-조단 소거법에 의해 계산

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 4 \\ 3x+8y+7z &= 20, \\ 2x+7y+9z &= 23 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 3 & 8 & 7 & : & 20 \\ 2 & 7 & 9 & : & 23 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 3 & 8 & 7 & : & 20 \\ 2 & 7 & 9 & : & 23 \end{bmatrix}$	①	$R_{1,2}(-3)$	$① \times (-3) + ②$
	②	$R_{1,3}(-2)$	$① \times (-2) + ③$
	③		
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 0 & 2 & 4 & : & 8 \\ 0 & 3 & 7 & : & 15 \end{bmatrix}$	①	$R_2(\frac{1}{2})$	$② \times (\frac{1}{2})$
	②		
	③		
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 3 & 7 & : & 15 \end{bmatrix}$	①	$R_{2,3}(-3)$	$② \times (-3) + ③$
	②		
	③		
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	①	$R_{3,1}(-1)$	$③ \times (-1) + ①$
	②	$R_{3,2}(-2)$	$③ \times (-2) + ②$
	③		
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	①	$R_{2,1}(-2)$	$② \times (-2) + ①$
	②		
	③		
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5 \\ 0 & 1 & 0 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$	①		
	②		
	③		

- 단일 해를 갖는 경우 기약 가우스 행렬로 변환된 행렬은 자유변수가 미존재
 $\Rightarrow$ 연립방정식의 해는 $x=5, y=-2, z=3$



【예제 2.12】 다음 연립방정식의 해를 가우스-조단 소거법에 의해 계산

$$\begin{array}{rcl} w+2x+4z=2 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & : & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & : & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & : & 6 \end{bmatrix} \\ w+2x+y+7z=1, & & \\ 2w+4x-2y+2z=6 & & \end{array}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & : & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & : & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & : & 6 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{1,2}(-1)$ $R_{1,3}(-2)$	$\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{2}$ $\textcircled{1} \times (-2) + \textcircled{3}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & : & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & : & 2 \end{bmatrix}$	① ② ③	$R_{2,3}(2)$	$\textcircled{2} \times (2) + \textcircled{3}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$	① ② ③	$w+2x+4z=2$ $y+3z=-1$	

- 기약 가우스 행렬을 연립방정식으로 변환하고, 자유변수를 $x=s, z=t$ 로 치환
 $\Rightarrow$ 연립방정식을 각각 선도변수 w 와 y 에 대해서 정리

$$\begin{aligned} w+2x+4z=2, \quad w &= -2x-4z+2 = -2s-4t+2 \\ y+3z &= -1, \quad y = -3z-1 = -3t-1 \end{aligned}$$

- s 와 t 에 임의의 값을 대입함으로써 무수히 많은 연립방정식의 해를 유도 가능

$$w = -2s-4t+2, \quad x=s, \quad y = -3t-1, \quad z=t$$

