1차 상보 필터와 회전행렬로 ARS 설계

KITECH 양광웅 작성

로봇의 자세를 측정하기 위해 1차 상보 필터(Complementary Filter)와 회전 행렬(Rotation Matrix)로 ARS(Attitude Reference System)를 설계한다. 3차원 자이로 센서와 가속도 센서에서 측정한 각도를 1차 상보 필터로 융합하여 각도를 계산한다.

1차 상보필터 설계

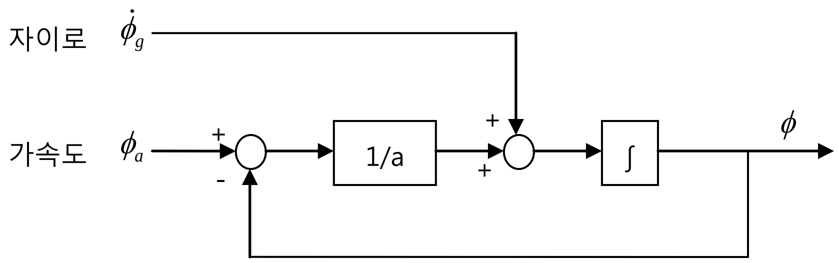
자이로 센서는 바이어스가 있지만 각도의 변화에 민감하게 반응하기 때문에 고역통과필터(high pass filter)를 사용하고, 가속도 센서에서 측정한 각도는 센서에 작용하는 외력에 의해 쉽게 영향을 받기 때문에 저역통과필터(low pass filter)를 사용한다.

$$\phi = \underbrace{\frac{as}{as+1}}_{\text{고역통과필터}} \left(\frac{1}{s}\dot{\phi}_g\right) + \underbrace{\frac{1}{as+1}}_{\text{저역통과필터}} \phi_a$$

여기서 $\dot{\phi}_g$는 자이로 센서 값에서 바이어스를 제거한 값이고, ϕ_a는 가속도 센서로부터 측정한 각도다. 위 식을 다시 쓰면,

$$\phi = \frac{1}{s}\left(\dot{\phi}_g + \frac{1}{a}(\phi_a - \phi)\right)$$

이다. 블록 다이어그램으로 그리면 다음과 같다.



블록 다이어그램을 살펴보면, 가속도 센서로부터 측정한 각도(ϕ_a)는 센서의 적분 각도(ϕ)와의 차를 이득 1/a를 곱하여 ϕ에 적분한다. 그리고 차이로 센서로부터 측정한 각속도($\dot{\phi}_g$)는 ϕ에 그대로 적분한다. 여기서 주의할 점은, $\dot{\phi}_g$는 센서 좌표계를 기준으로 하는 각속도 값이고, ϕ_a는 전역 좌표계를 기준으로 하는 각도 값이라는 점이다. 이 때문에 적분하는 방법에 차이가 있다.

3차원 공간에서 센서의 자세각을 다루기 위하여 회전행렬을 사용한다. 회전행렬은 오일러각에 비

해 각도의 합과 차를 쉽게 계산할 수 있기 때문이다.

회전행렬

오일러각 $\phi,\ \theta,\ \psi$ 에 의한 회전행렬 $\mathbf{R}$ 는 다음과 같이 정의된다.
(회전 순서가 z축, y축, x축 순서임에 주의)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

회전행렬 $\mathbf{R}$ 로부터 오일러각을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\psi &= \tan^{-1}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right), \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{-a_{31}}{\sqrt{a_{32}^2 + a_{33}^2}}\right), \\
\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{a_{32}}{a_{33}}\right).
\end{aligned}
$$

a_{ij} 는 행렬 $\mathbf{R}$ 의 i 행과 j 열의 원소다.

필터 구현

다음은 자이로 센서로부터 각속도 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 를 측정하고, 가속도 센서로부터 가속도 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 를 측정하여 센서의 자세각을 계산하는 과정이다.

자이로 센서의 바이어스 값

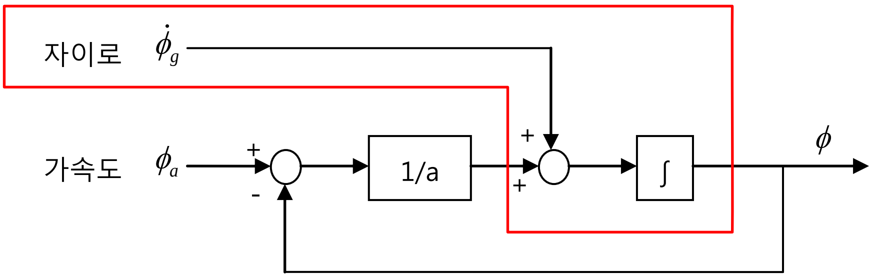
이상적인 자이로 센서는 움직이지 않을 때 0을 출력하여야 하나, 대부분의 실제 센서가 0이 아닌 바이어스 된 값을 출력한다. 그래서 센서에서 측정된 값으로부터 바이어스 된 값을 제거해야 할 필요가 있다. 다음 과정은 low pass 필터와 같은 역할을 하도록 측정되는 신호들의 평균을 구하는 과정이다.

$$\boldsymbol{\omega}_m \leftarrow \frac{n\boldsymbol{\omega}_m + \boldsymbol{\omega}}{n+1}$$

n은 평균을 낸 횟수이며, 어떠한 값 이상으로 커지지 않도록 제한하여야 한다. 즉, n이 특정 값에 도달하기 전까지는 평균을 낼 때마다 1씩 증가하다가, 특정 값에 도달하면 고정된 값을 사용하도록 한다.

각속도의 적분

각속도의 적분 과정은 블록 다이어그램에서 붉은색 박스로 표시한 부분이다.



먼저 자이로 센서로부터 측정한 각속도 $\boldsymbol{\omega}$ 와 $\boldsymbol{\omega}$ 의 평균 $\boldsymbol{\omega}_m$ 간의 차를 계산함으로 자이로 센서의 바이어스를 제거한 각속도 $\Delta\phi_g$ 를 계산한다. Δt 는 각속도 센서의 데이터 측정 주기다.

$$\Delta\phi_g = (\Delta\phi, \Delta\theta, \Delta\psi) = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_m)\Delta t$$

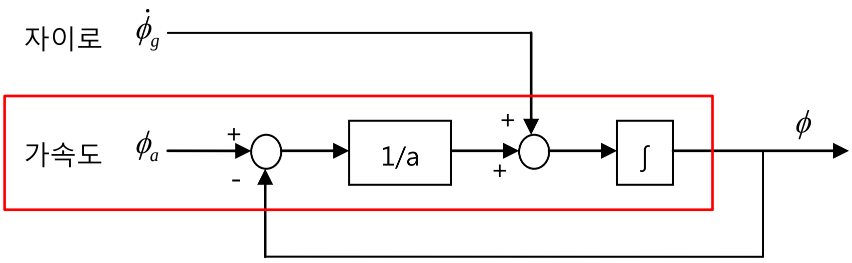
회전행렬 $\mathbf{R}$ 은 현재 센서의 자세각을 표현하는 행렬이다. 자이로 센서로부터 읽은 각속도를 회전행렬의 변위 $\Delta\mathbf{R}_g$ 로 바꾸어 $\mathbf{R}$ 에다가 적분(회전 행렬간의 곱) 한다.

$$\Delta\mathbf{R}_g = \mathbf{R}_z(\Delta\psi)\mathbf{R}_y(\Delta\theta)\mathbf{R}_x(\Delta\phi)$$

$$\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R}\Delta\mathbf{R}_g$$

중력 가속도로 자세각 보정

중력 가속도로 자세각을 보정하는 과정은 블록 다이어그램에서 붉은색 박스로 표시한 부분이다.



중력가속도는 항상 지구 중심으로 향하기 때문에 가속도 센서에 다른 힘이 작용하지 않을 경우 $\mathbf{g}=(0,0,-9.81)$ 가 측정된다. 가속도 센서에서 측정한 가속도와 중력가속도를 비교함으로 $\mathbf{R}$ 를 보정할 수 있다. 하지만 이러한 조건은 가속도 센서에 작용하는 힘이 오직 중력만 있을 때 가능하다. 중력가속도와 이러한 힘을 분리하여 측정할 수 없기 때문에, 중력가속도 외 다른 힘이 작용하고 있는 조건은 $\|\mathbf{a}\|\approx\|\mathbf{g}\|$ 인지 확인해 보는 것이 제일 간단한 방법이다.

가속도 센서에서 측정한 가속도 $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}^T$ 에는 중력가속도와 센서의 가속에 의한 다양한 종류의 가속도가 포함되어있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}}+\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}+\mathbf{R}^T\mathbf{g} \qquad (\because \mathbf{R}^T=\mathbf{R}^{-1}) \\
&= \begin{bmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & v_z & -v_y\\ -v_z & 0 & v_x\\ v_y & -v_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}+g_z\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\sin\phi\\ \cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

여기서 $\dot{\mathbf{v}}=\begin{bmatrix}\dot{v}_x & \dot{v}_y & \dot{v}_z\end{bmatrix}^T$ 는 선가속도이며 $\mathbf{g}=\begin{bmatrix}g_x & g_y & g_z\end{bmatrix}^T$ 는 관성좌표계에서 중력가속도 값 $(0,\ 0,\ -9.81)$ 을 가진다.

위 식에서 선가속도 $\dot{\mathbf{v}}$ 가 0이고 각속도 $\boldsymbol{\omega}$ 가 0일 때는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$
\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}=g_z\begin{bmatrix}-\sin\theta_e\\ \cos\theta_e\sin\phi_e\\ \cos\theta_e\cos\phi_e\end{bmatrix}
$$

오일러각으로 정리하면 다음과 같다.

$$
\tan\phi_e=\frac{a_y}{a_z},\quad \sin\theta_e=-\frac{a_x}{g_z}.
$$

$$
\phi_e=\mathrm{atan}\,2\left(-a_y,-a_z\right),\quad \theta_e=\mathrm{asin}\left(-\frac{a_x}{g_z}\right).
$$

여기서 구한 ϕ_e,θ_e 로 $\mathbf{R}_a$ 을 계산하고 $\mathbf{R}$ 을 다음과 같이 업데이트 한다.

$$
\mathbf{R}_a=\mathbf{R}_y(K_a\theta_e)\mathbf{R}_x(K_a\phi_e)
$$

$$
\mathbf{R}\leftarrow\mathbf{R}_a\mathbf{R}
$$

K_a 는 중력으로 찾은 각도의 오차를 업데이트하는 비율(이득)이다. 중력벡터의 크기가 1g 근처일 때 이득이 커야하고 1g에서 멀어질수록 이득이 적어야 한다. 그래서 이득을 다음과 같이 계산하도록 하였다.

$$K_a = \frac{1}{a} = 0.1\frac{1}{1+100(\|\mathbf{n}_g\|-1)^2}$$